ESERCIZI DI TRIGONOMETRIA

1. Risolvere le seguenti equazioni nell'intervallo $[0, 2\pi]$:

   (a) $4\sin x\cos x - \cos 2x - 2 = 0$
   (b) $2\cos^2 x = 5\sin x - 1$
   (c) $5\sin^2 x + 3\cos^2 x + \cos x = 5$
   (d) $2\sin x(1-\sin x) = 1 - \sin x$
   (e) $2\sin x\cos x + 1 = 0$
   (f) $\sin 3x = \sin x$
   (g) $\tan 2x = -\sqrt{3}$
   (h) $\sin^2 \frac{x}{2} + 2\cos^2 \frac{x}{2} = \cos^2 x + 3\cos x$

In molti dei seguenti esercizi può essere utile la rappresentazione mediante Geogebra, con l'utilizzo di slider, per capire meglio come variano le grandezze in questione.

1. E' dato un triangolo ABC in cui l'angolo l'angolo in C ha ampiezza doppia dell'angolo in B e $\overline{BC} = a$. Considerate le altezze BH e CL, determinare l'angolo $\widehat{ABC} = x$ tale che si abbia $\overline{BH}^2 + \overline{CL}^2 = \overline{BC}^2$.

2. In un semicerchio di diametro $AB = 2r$ condurre due corde uguali BC e CD. Determinare l'angolo $B\hat{A}C = x$ in modo tale che il perimetro del quadrilatero $ABCD$ sia uguale a $r(2+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

3. Di un triangolo acutangolo ABC isoscele sulla base AB si sa che $\overline{AB} = 2a\sqrt{6}$ e che $\sin\widehat{ACB} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

   (a) trovare la misura della mediana AM relativa al lato BC;
   (b) dimostrare che i triangoli AMB e AMC sono equivalenti;
   (c) trovare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{AMB}$.

4. Sia ABC un triangolo acutangolo in cui $BC = a$ e $AB = \frac{3}{2}a$. Detto M il punto medio di BC e indicata con H la proiezione di M su AB, determinare l'angolo $A\hat{B}C = x$ in modo tale che $\overline{AM}^2 - \overline{AC}^2 + \overline{HM}^2 = \frac{3}{16}a^2$

5. Risolvere, utilizzando la calcolatrice, il triangolo ABC sapendo i due lati $a = 26$ e $c = 31$ e l'angolo $\alpha = 36°$.

6. Sia OAB un settore circolare di ampiezza $A\hat{O}B = \frac{\pi}{2}$ e raggio $\overline{AO} = \overline{BO} = r$. Detto P un punto dell'arco $\overset{\frown}{AB}$, determinare l'angolo $A\hat{O}P = x$ in modo tale che, indicati con M, H, K, rispettivamente il punto medio di AO e le proiezioni di P su OA e su OB, sia verificata la relazione $\overline{PM}^2 + \overline{PK}^2 + \overline{HK}^2 - \overline{PH}^2 = \frac{5}{4}r^2$.

7. In una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ è inscritto il quadrilatero $ABCD$ tale che la diagonale AC formi con il lato AD un angolo $C\hat{A}D = \frac{\pi}{6}$. Posto $C\hat{A}B = x$, determinare x in modo tale che $\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{BC} - \overline{AB} = r$.

8. Sia ABCun triangolo equilatero di lato $2l$ e sia H il punto medio del lato AB. Un quadrato $EFGH$ ha i lati EH e GH che intersecano rispettivamente i lati BC e AC del triangolo equilatero. Chiamiamo P il punto di intersezione fra i segmenti AC e GH e Q il punto di intersezione fra BC e HE. Chiamato x l'angolo $A\hat{H}P$

   (a) trovare l'intervallo di variabilità di x;
   (b) determinare $x$in modo che l'area del quadrilatero $PHQC$ sia $\frac{3}{4}l^2\sqrt{3}$

9. Date due semicirconferenze di diametro $AB = BC = 2r$, tangenti esternamente in B, determinare un triangolo MBNche abbia l'angolo in B di $60°$, il vertice M sulla prima semicirconferenza e il vertice N sulla seconda, in modo che sia $\overline{MN}^2 = k\overline{AB}^2$. Discutere il problema.

10. Dato un triangolo equilatero ABC inscritto in una circonferenza di raggio r verificare che qualunque sia il punto P appartenente alla circonferenza, la somma dei quadrati delle distante di P dai vertici del triangolo é uguale a $6r^2$. Successivamente stabilire quali sono le posizioni del punto P per le quali il perimetro del quadrilatero di vertici $ABCP$ é uguale a $2r(\sqrt{3}+1)$.