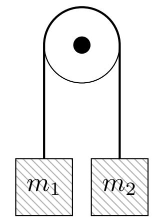
Verifica sulla dinamica rotazionale
Classe 3E - 17 aprile 2015

N.B. Si ponga in tutti gli esercizi l'accelerazione di gravità pari a $g = 10.0\,\mathrm{ms^{-2}}$.

Es. 1 Due corpi di massa $m_1 = 10.0\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 25.0\,\mathrm{kg}$ sono collegati tra loro da una corda passante per una carrucola di massa $M = 10.0\,\mathrm{kg}$ assimilabile ad un disco omogeneo di raggio $R = 20.0\,\mathrm{cm}$, come in figura.



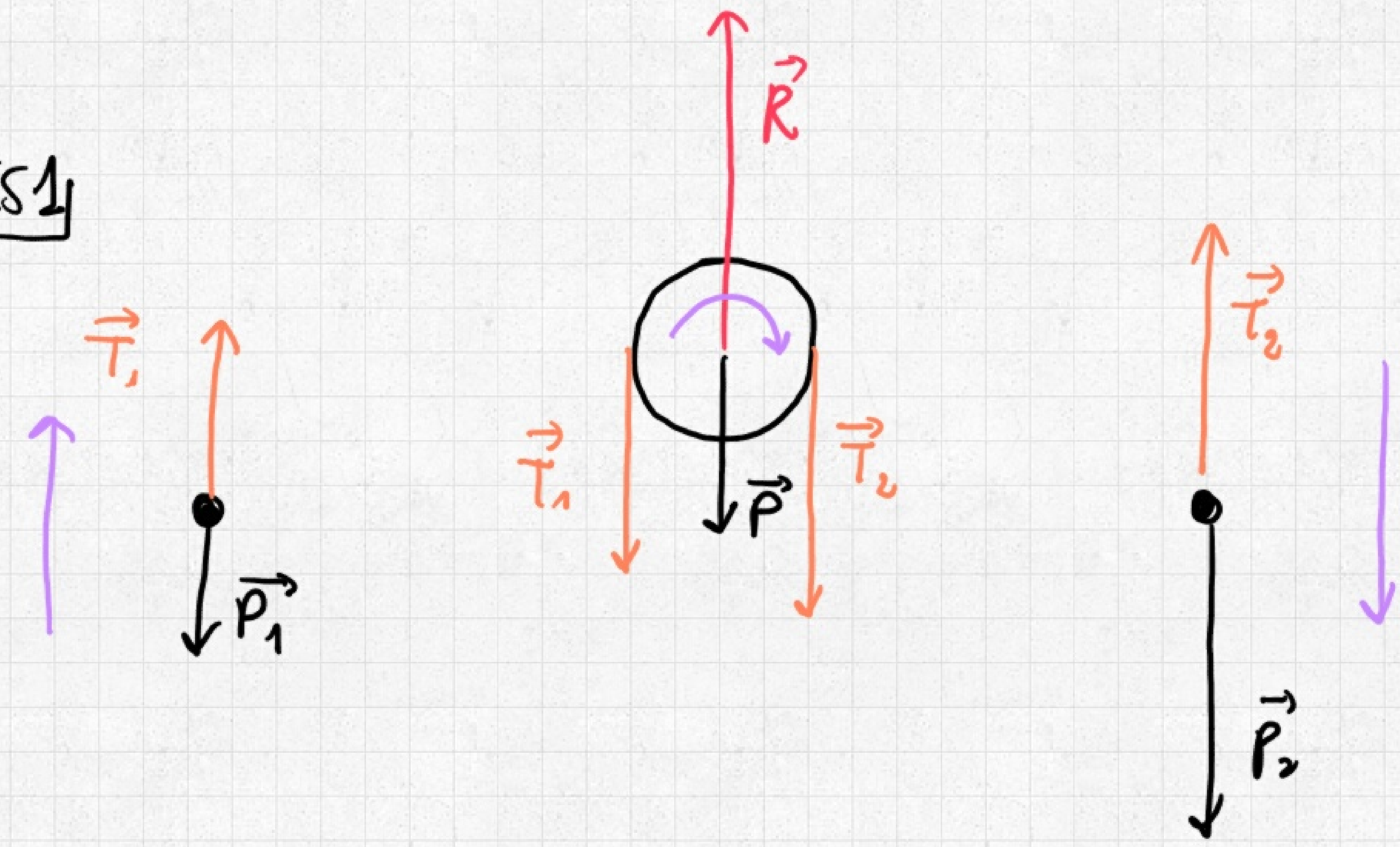
① Traccia i diagrammi delle forze agenti su ciascun corpo e sulla carrucola e scrivi le rispettive equazioni della dinamica lineare e rotazionale.
② Ricava l'accelerazione lineare del sistema e le tensioni nei due tratti di fune.
③ Supponendo che inizialmente i due blocchi siano in quiete e alla stessa altezza, determina dopo quanto tempo essi si troveranno ad un dislivello pari a $2.00\,\mathrm{m}$. [PUNTI 30/100]

Es. 2 Considera un disco omogeneo di massa $m = 8.00\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 0.200\,\mathrm{m}$, inizialmente fermo su un piano orizzontale, che inizia a rotolare senza strisciare a causa di un forza applicata al suo centro di massa con direzione parallela al piano e intensità $F = 12.0\,\mathrm{N}$. ① traccia lo schema delle forze e scrivi le equazioni della dinamica traslazionale e rotazionale del disco; ② calcola l'intensità della forza di attrito statico f_s tra disco e suolo e l'accelerazione lineare del sistema; ③ determina il minimo coefficiente di attrito statico μ_s necessario affinché il vincolo di rotolamento sia garantito.
[PUNTI 30/100]

Es. 3 Dalla sommità di un piano inclinato di $30.0°$ sull'orizzonte, ad un' altezza $h = 10.0\,\mathrm{m}$ dal suolo, viene lasciato rotolare un disco omogeneo $m = 4.00\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 0.400\,\mathrm{m}$, inizialmente in quiete. Determina la velocità (traslazionale) del disco quando giunge al suolo.
[PUNTI 20/100]

Es. 4 Un disco omogeneo di legno avente massa $M = 4.00\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 0.400\,\mathrm{m}$, vincolato a ruotare senza attriti attorno al proprio asse su un piano orizzontale, ha una velocità iniziale di $20.0\,\mathrm{rad/s}$. Ad un certo punto il disco viene colpito tangenzialmente da un proiettile di massa $m = 50.0\,\mathrm{g}$ che, provenendo con velocità $80.0\,\mathrm{m/s}$ sul piano orizzontale, si conficca sul bordo del disco. Determina la velocità angolare finale del sistema sia nel caso in cui il proiettile viaggia nello stesso verso della velocità tangenziale del disco sia nel caso in cui viaggia nel verso opposto.
[PUNTI 20/100]

ES1



II PD_1 : $T_1 - P_1 = m_1 a$

II PD_2 : $P_2 - T_2 = m_2 a$

$$\text{II PD}_{carr}: \begin{cases} (L) & R = P + T_1 + T_2 \\ (R) & T_2 \cdot r - T_1 \cdot r = I \cdot \alpha \end{cases}$$

Osservato che $I = \frac{1}{2} M r^2$ e che $\alpha = a/r$, si avrà:

$$\begin{cases} T_1 - P_1 = m_1 a \\ T_2 - T_1 = \frac{1}{2} M a \\ P_2 - T_2 = m_2 a \end{cases} \rightarrow P_2 - P_1 = (m_1 + \tfrac{1}{2} M + m_2) a$$

$$\rightarrow a = \frac{P_2 - P_1}{m_1 + \frac{1}{2} M + m_2} = \frac{250 - 100}{25{,}0 + 5{,}00 + 10{,}0} = \frac{150}{40{,}0} \cong 3{,}75 \text{ m/s}$$

dunque

$T_2 = P_2 - m_2 a = 250 - 25{,}0 \cdot 3{,}75 \cong 156 \text{ N}$

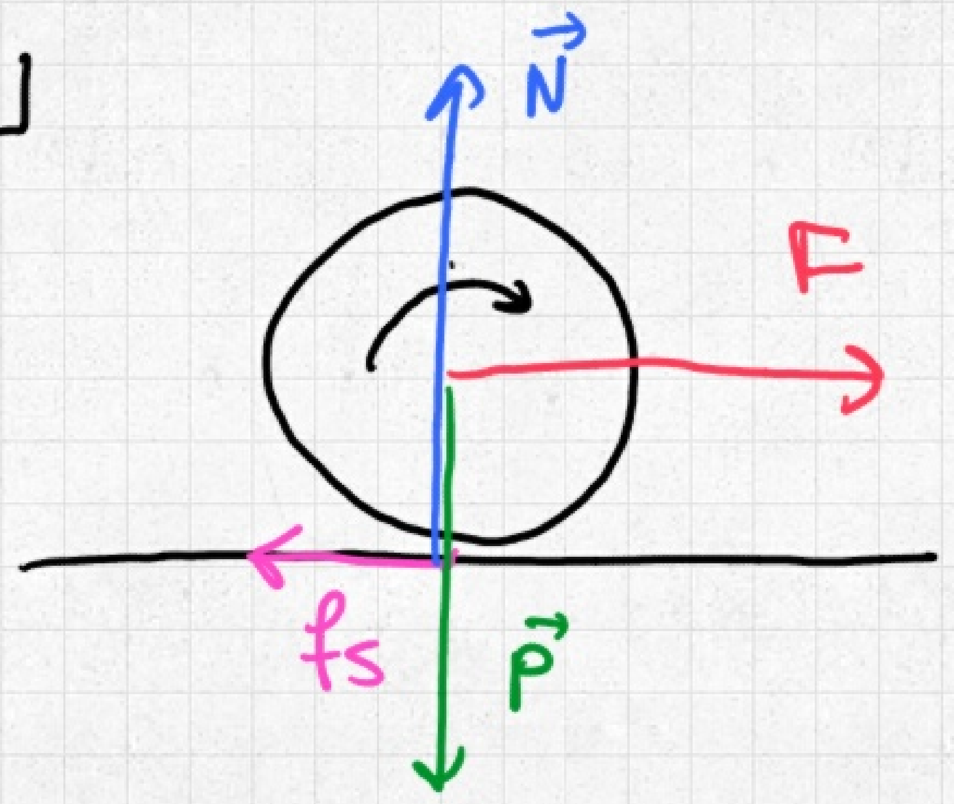
$T_1 = P_1 + m_1 a = 100 + 10{,}0 \cdot 3.75 \cong 138 \text{ N}$

$N = T_1 + T_2 + P = 156 + 138 + 100 = 394 \text{ N}$

Il dislivello tra i due corpi è il doppio della distanza percorsa da ciascuno, pertanto

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow t = \sqrt{h/a} = \sqrt{\frac{2{,}00}{3{,}75}} \cong 0{,}730 \text{ s}$$

ES2



Vincolo di rotolamento (*): $\begin{cases} v = \omega r \\ a = \alpha r \end{cases}$

$$\text{II PD} \begin{cases} (L) & F - f_s = m a \quad \wedge \quad N = P = mg = 80{,}0 \text{ N} \\ (R) & f_s \cdot r = I \alpha \end{cases}$$

osservato che $I = \frac{1}{2} m r^2$ e tenuto conto delle relaz. (*), si ottiene

$$\begin{cases} F - f_s = m a \\ f_s = \frac{1}{2} m a \end{cases} \rightarrow F = +\frac{1}{2} m a + m a \rightarrow a = \frac{2F}{3m} = \frac{2 \cdot 12{,}0}{3 \cdot 8{,}00} = 1{,}00 \text{ m/s}$$

Pertanto $f_s = \frac{1}{2} m a = \frac{1}{2} \cdot 8{,}00 \cdot 1{,}00 = 4{,}00\,N$

Nel caso limite $f_s = f_{s,max}$ quindi

$$\mu_s = \frac{f_{s,max}}{N} = \frac{4{,}00}{80{,}0} = 0{,}0500$$

ES3)

$$K = K_r + K_t = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

essendo $v = \omega r$ (vincolo rotolamento), l'energia cinetica totale sarà:

$$K = \frac{1}{4} m v^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{4} m v^2$$

Applicando (PCEM) si ottiene

$$E_I = E_F \Leftrightarrow U_I = K_F \Leftrightarrow \cancel{m} g h = \frac{3}{4} \cancel{m} v^2$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{4/3\, g h} = \sqrt{4/3 \cdot 10{,}0 \cdot 10{,}0} \simeq 11{,}4\,m/s$$

ES4) Iniziale   Finale

Poiché le forze esterne agiscono solo nella direzione dell'asse i loro momento è nullo, quindi il momento angolare deve conservarsi:

$$L_I = L_F \rightarrow m v_P r \pm I_D \omega_0 = (m r^2 + I_D)\omega_f$$

ove si considera il segno − se il disco ruota in senso orario. Pertanto

$$\omega_f = \frac{m v_P r \pm \frac{1}{2} M r^2 \omega_0}{m r^2 + \frac{1}{2} M r^2} = \frac{2 m v_P / r \pm M \omega_0}{2m + M}$$

$$= \frac{2 \cdot 0{,}0500 \cdot 80{,}0/0{,}400 \pm 4{,}00 \cdot 20{,}0}{2 \cdot 0{,}0500 + 4{,}00}$$

$$= \frac{20{,}0 \pm 80{,}0}{4{,}10} = \begin{cases} 24{,}4\ rad/s & \text{(antiorario)} \\ -14{,}6\ rad/s & \text{(orario)} \end{cases}$$