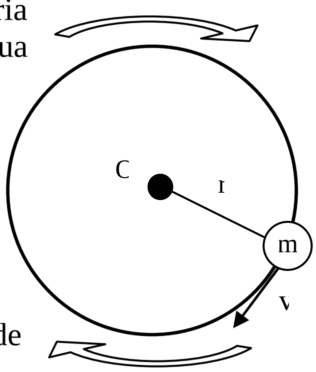
Energia cinetica nel moto circolare

Energia cinetica di rotazione

Consideriamo un punto materiale di massa *m* che si muove su una traiettoria circolare di centro *O* e raggio *r*, con velocità di modulo costante *v*. La sua energia cinetica vale: $E_c = \frac{1}{2} m v^2$. Ricordando che nel moto circolare uniforme il modulo della velocità tangenziale è pari a: $v = \omega \cdot r$, dove ω è la velocità angolare e *r* il raggio della traiettoria, otteniamo: $E_c = \frac{1}{2} m \cdot (\omega \cdot r)^2 = \frac{1}{2} \cdot m r^2 \cdot \omega^2$.



La quantità mr^2 viene solitamente indicata con la lettera *I*: $I = mr^2$, e prende il nome di *momento d'inerzia* della massa *m* rispetto all'asse di rotazione passante per il centro della traiettoria.

L'unità di misura del momento d'inerzia nel SI è: $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.

Esempio 1 – Calcolo di momenti d'inerzia e di energie cinetiche

Un papà di 75 kg e il suo bambino di 25 kg salgono su una giostra al parco e siedono su due sedili distanti dal centro di rotazione rispettivamente 5,0 m e 4,5 m. La velocità angolare della giostra è $\omega = 1{,}2 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Vogliamo calcolare i loro momenti d'inerzia rispetto all'asse di rotazione e le rispettive energie cinetiche.

Scriviamo i dati

Massa del padre: m_p= 75 kg

Massa del figlio: m_f = 25 kg

Distanza del padre dall'asse di rotazione: r_p = 5,0 m;

Distanza del figlio dall'asse di rotazione: r_f = 4,5 m

Incognite

Momento d'inerzia I_p del padre e momento d'inerzia I_f del figlio.

Energia cinetica E_{cp} del padre ed energia cinetica E_{cf} del figlio.

Analisi e soluzione

Calcoliamo il momento d'inerzia del padre: $I_p = m_p r_p^2 = 75\,\mathrm{kg} \cdot (5{,}0\,\mathrm{m})^2 = 1{,}9 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.

Il momento d'inerzia del figlio risulta: $I_f = m_f r_f^2 = 25\,\mathrm{kg} \cdot (4{,}5\,\mathrm{m})^2 = 5{,}1 \cdot 10^2\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.

Calcoliamo i valori delle energie cinetiche:

$$E_{cp} = \frac{1}{2} I_p \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}9 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^2} \cdot \left(1{,}2 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 1{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$$ Energia cinetica del padre.

$$E_{cf} = \frac{1}{2} I_f \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 5{,}1 \cdot 10^2\,\mathrm{kg\,m^2} \cdot \left(1{,}2 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 3{,}7 \cdot 10^2\,\mathrm{J}$$ Energia cinetica del figlio.

L'energia cinetica di rotazione, $E_c = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$, nel moto circolare è equivalente all'energia cinetica di traslazione $E_c = \frac{1}{2} m v^2$. Infatti nelle due formule compare il fattore $\frac{1}{2}$; inoltre nella prima il momento d'inerzia *I* esprime l'inerzia alla rotazione del corpo, mentre nella seconda la massa *m* costituisce l'inerzia alla traslazione. In entrambe le formule infine compare il quadrato della velocità specifica del moto considerato.

Energia cinetica e momento d'inerzia di un sistema di più corpi

L'energia cinetica totale del sistema costituito dal padre e dal figlio dell'esempio 1 è data dalla somma delle due energie cinetiche: $E_{ct} = E_{cp} + E_{cf} = \frac{1}{2} m_p r_p{}^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m_f r_f^2 \cdot \omega^2$.

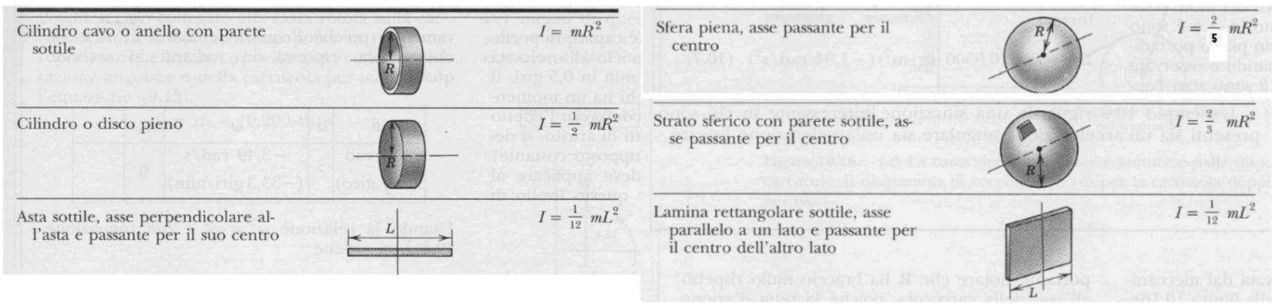
Raccogliendo i fattori comuni: $E_{ct} = \frac{1}{2}\left(m_p r_p^2 + m_f r_f^2\right) \cdot \omega^2$.

Il fattore $\left(m_p r_p^2 + m_f r_f^2\right)$ nella formula dell'energia cinetica costituisce il momento d'inerzia del sistema formato da padre e figlio, calcolato rispetto all'asse di rotazione.

In generale il momento d'inerzia di un sistema costituito da *n* masse, m_1, m_2, …, m_n, poste alle distanze r_1, r_2, …, r_n dall'asse di rotazione, è dato da: $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_n r_n^2$.

Il momento d'inerzia di un corpo esteso si calcola suddividendo idealmente il corpo in piccoli elementi di massa *m* e sommando i prodotti ottenuti moltiplicando la massa di ciascun elemento per il quadrato della rispettiva distanza dall'asse di rotazione.

Nella tabella seguente sono raccolti i momenti d'inerzia di alcuni corpi solidi omogenei.



Cilindro cavo o anello con parete sottile	$I = mR^2$
Cilindro o disco pieno	$I = \frac{1}{2} mR^2$
Asta sottile, asse perpendicolare all'asta e passante per il suo centro	$I = \frac{1}{12} mL^2$
Sfera piena, asse passante per il centro	$I = \frac{2}{5} mR^2$
Strato sferico con parete sottile, asse passante per il centro	$I = \frac{2}{3} mR^2$
Lamina rettangolare sottile, asse parallelo a un lato e passante per il centro dell'altro lato	$I = \frac{1}{12} mL^2$

Notiamo che il momento d'inerzia di un corpo non dipende soltanto dalla sua massa, ma anche dal modo in cui questa è distribuita rispetto all'asse di rotazione. É più facile tenere in equilibrio un ombrello appoggiato su un dito dalla parte del puntale che dalla parte del manico, perché nel primo caso la massa dell'ombrello risulta più lontana dal centro di rotazione rendendo maggiore il momento d'inerzia dell'ombrello che quindi più difficilmente cade.

Esempio 2 – Calcolo del momento d'inerzia di una ruota e di un disco

Una ruota è formata da un anello di massa *m* = 25 kg collegato al centro di rotazione con raggi di massa trascurabile. Il raggio della ruota è *r* = 0,40 m. Essa sta ruotando con una frequenza di 8,0 Hz. Vogliamo calcolare il momento d'inerzia della ruota e la sua energia cinetica. Vogliamo determinare inoltre quanto varrebbe il momento d'inerzia e l'energia cinetica se la massa della ruota fosse distribuita uniformemente formando un disco dello stesso raggio e con la stessa frequenza di rotazione dell'anello.

Scriviamo i dati

Massa della ruota m = 25 kg
Raggio della ruota r = 0,40 m
Frequenza di rotazione f = 8,0 Hz

Incognite

Momento d'inerzia I_a ed energia cinetica E_{ca} della ruota ad anello.
Momento d'inerzia I_d ed energia cinetica E_{cd} della ruota a disco.

Analisi e soluzione

Calcoliamo il momento d'inerzia della ruota a forma di anello. Dalla tabella dei momenti d'inerzia deduciamo la formula: $I_a = m \cdot r^2 = 25\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}40\,\mathrm{m})^2 = 4{,}0\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.

Per calcolare l'energia cinetica di rotazione dobbiamo dapprima determinare la velocità angolare: $\omega = 2\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}0\,\mathrm{Hz} = 50\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.

L'energia cinetica è quindi data da: $E_{ca} = \frac{1}{2} I_a \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}0\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \left(50 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 5{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$.

Consideriamo ora la ruota a forma di disco. Il momento d'inerzia è:

$$I_d = \frac{1}{2} m \cdot r^2 = \frac{1}{2} I_a = \frac{1}{2} \cdot 4{,}0\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 = 2{,}0\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 .$$

L'energia cinetica vale: $E_{ca} = \frac{1}{2} I_d \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}0\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \left(50 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 2{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$.

Teorema degli assi paralleli o di Huygens-Steiner

Per calcolare il momento d'inerzia di un corpo che ruota attorno a un asse che non passa attraverso il suo baricentro, si utilizza il teorema di Huygens-Steiner o teorema degli assi paralleli:

$$I = I_G + m \cdot d^2 ,$$

dove I_G è il momento d'inerzia del corpo calcolato rispetto a un asse parallelo a quello di rotazione e passante per il baricentro G del corpo; m è la massa del corpo e d è la distanza tra l'asse di rotazione e l'asse ad esso parallelo passante per il baricentro.

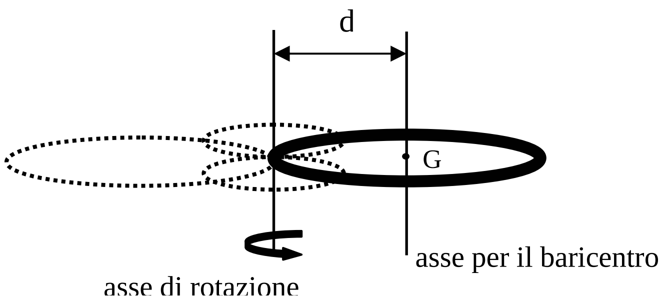
Esempio 3 – Applicazione del teorema di Huygens-Steiner

Consideriamo un anello uniforme di massa m = 0,200 kg e di raggio 0,300 m. Esso ruota attorno a un asse perpendicolare al piano dell'anello e passante per un suo punto. Vogliamo calcolare il suo momento d'inerzia.

Scriviamo i dati

Massa dell'anello: m = 0,200 kg

Raggio dell'anello: r = 0,300 m. Il raggio dell'anello è pari alla distanza d tra l'asse di rotazione e l'asse ad esso parallelo passante per il baricentro posto nel centro dell'anello.



Incognite

Momento d'inerzia I dell'anello rispetto all'asse di rotazione

Analisi e soluzione

Calcoliamo il momento d'inerzia dell'anello applicando il teorema di Huygens-Steiner:

$I = I_G + md^2 = mr^2 + md^2 = 2\,mr^2 = 2 \cdot 0{,}200\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}300\,\mathrm{m})^2 = 0{,}036\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.

Il momento d'inerzia ed energia cinetica di rotazione nel quotidiano

Il motore di una sega circolare o di un laminatoio oppure di una macchina che deve compiere movimenti ciclici, spesso è soggetto a variazioni di velocità angolare dovute a cambiamenti della coppia resistente. Tali variazioni di velocità possono essere attenuate applicando all'albero motore un *volano*, costituito da un disco ad elevato momento d'inerzia. Quando la coppia del motore è maggiore della coppia resistente, il volano immagazzina energia cinetica di rotazione che restituisce al sistema quando la coppia del motore è minore di quella resistente.

Verifiche di comprensione

1. Come si calcola il momento d'inerzia di una massa *m* che si muove su una circonferenza di raggio *r*?
2. Qual è l'unità di misura nel SI del momento d'inerzia?
3. Come si calcola l'energia cinetica di rotazione di un corpo avente momento d'inerzia *I* e velocità angolare ω?
4. Che cosa esprime il momento d'inerzia nel moto rotatorio?
5. Come si calcola il momento d'inerzia di un sistema di corpi?
6. Come si calcola il momento d'inerzia di un corpo esteso?
7. Perché è più facile sostenere un ombrello in verticale tenendolo appoggiato sul dito tramite il puntale piuttosto che con il manico?
8. Come si calcola il momento di inerzia di un corpo che ruota attorno a un asse che non passa per il baricentro?
9. Che cos'è e a che cosa serve il volano?

Verifiche di conoscenza

1. L'energia cinetica di una massa puntiforme *m* che ruota su una circonferenza con velocità angolare ω:
   a. è direttamente proporzionale al raggio
   b. è inversamente proporzionale al raggio
   c. è proporzionale al quadrato del raggio
2. Il momento d'inerzia di una massa puntiforme in rotazione:
   a. è costante qualunque sia la sua posizione rispetto all'asse di rotazione
   b. è proporzionale al quadrato del raggio
   c. è direttamente proporzionale al raggio
3. L'unità di misura del momento d'inerzia nel SI è:
   a. $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2$
   b. $\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
   c. $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}$
   d. $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$
4. Il momento d'inerzia di un corpo di massa *m* risulta:
   a. maggiore se la massa del corpo è disposta prevalentemente lontano dall'asse di rotazione
   b. maggiore se la massa del corpo è disposta prevalentemente vicino all'asse di rotazione
   c. non dipende da come è disposta la massa
5. *Completa l'enunciato del teorema di Huygens-Steiner o degli assi paralleli inserendo al posto dei puntini vocaboli scelti nell'elenco sotto riportato:* "Il momento d'inerzia di un corpo che ruota attorno a un asse che non passa attraverso il suo … è dato da … , dove I_G è … del corpo calcolato rispetto a un asse … a quello di rotazione e passante per il … del corpo; … è la massa del corpo e *d* è … tra … e l'asse ad esso parallelo passante per il …"
   (centro, baricentro, punto di appoggio, il momento d'inerzia, il peso, $I = I_G \cdot (m \cdot d^2)$, $I = I_G + m \cdot d^2$, $I = I_G - m \cdot d^2$, *m, la distanza, la massa, parallelo, perpendicolare, l'asse di rotazione, l'asse trasversale).*

Problemi

1. Un satellite di massa 1200 kg ruota attorno alla Terra su un'orbita di raggio $4{,}226 \cdot 10^4$ km. Calcola il suo momento d'inerzia e la sua energia cinetica sapendo che impiega 24 ore per compiere un giro attorno alla Terra.
2. Una sfera piena di massa 60,0 kg e raggio 40,0 cm, ruota con una velocità angolare di 25,0 $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ intorno a un suo diametro. Calcola l'energia cinetica della sfera.
3. Una ruota a forma di anello ruota intorno al proprio asse e possiede un'energia cinetica di 300 J. La massa della ruota vale 5,0 kg e il raggio è di 0,60 m. Calcola la frequenza di rotazione della ruota.
4. Calcola l'energia cinetica media della Terra nel suo moto di rotazione intorno al proprio asse, e l'energia cinetica nel suo moto di rivoluzione intorno al Sole. ($M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m; distanza Terra-Sole = $1{,}5 \cdot 10^{11}$m).
5. Calcola il momento d'inerzia di una sfera di massa 0,80 kg e diametro 15 cm rispetto ad un asse tangente alla sfera.