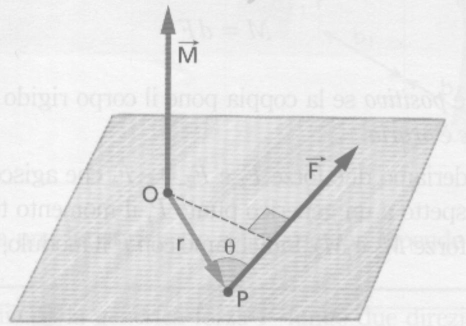
Momento torcente e prodotto vettoriale

Il momento di una forza può essere definito in modo elegante utilizzando il prodotto vettoriale:

il momento rispetto a un punto O di una forza $\vec{F}$ applicata nel punto P è

$$\vec{M} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F} \tag{13}$$



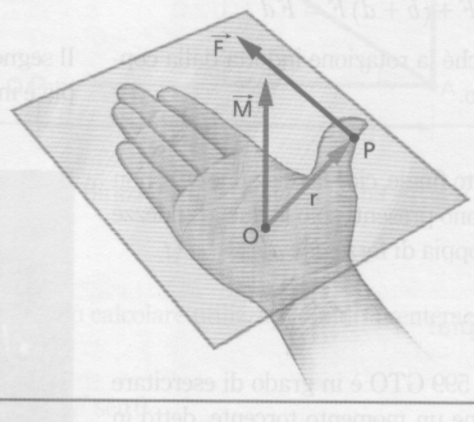
DENTRO LA FORMULA

Il momento di una forza è un vettore che ha:

- modulo dato dalla relazione

$$M = r F \operatorname{sen} \theta$$

  dove $r = OP$ e θ è l'angolo fra $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{F}$;
- direzione perpendicolare al piano che contiene $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{F}$;
- verso stabilito secondo la regola della mano destra, cioè il verso è uscente dal palmo di una mano destra che ha il pollice nel verso di $\overrightarrow{OP}$ e le altre dita nel verso di $\vec{F}$.

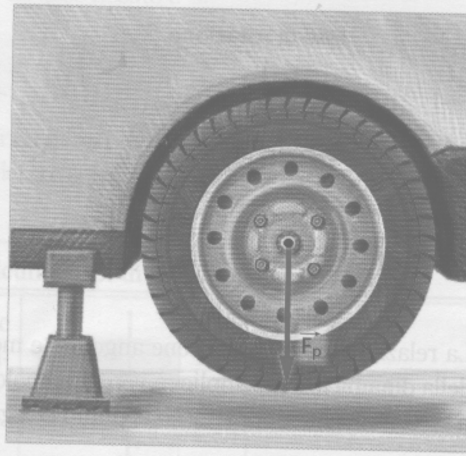


5 Dinamica rotazionale

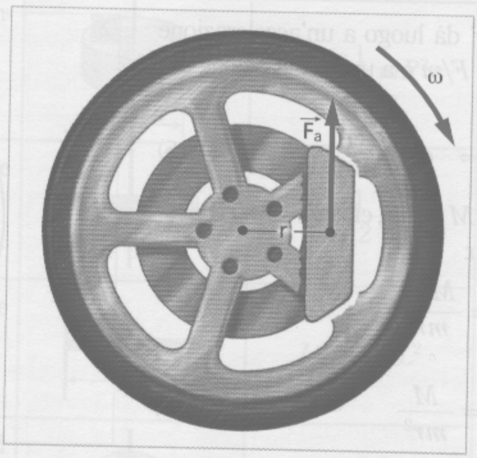
Momento torcente e accelerazione angolare

Consideriamo un corpo rigido libero di ruotare attorno a un asse. L'azione di una forza cambia la velocità di rotazione del corpo solo se genera un momento torcente attorno all'asse di rotazione.

1 Il peso della ruota non la mette in rotazione perché genera un momento torcente nullo rispetto all'asse di rotazione.



2 La forza d'attrito con i ferodi produce un momento torcente di segno opposto al verso di rotazione della ruota.



Fra la causa (il momento torcente) e l'effetto (la rotazione del corpo) sussiste una precisa relazione; infatti si verifica sperimentalmente che

l'accelerazione angolare di un corpo rigido è proporzionale al momento torcente che agisce su di esso:

$$\alpha \propto M \tag{14}$$

Secondo principio della dinamica per il moto rotazionale

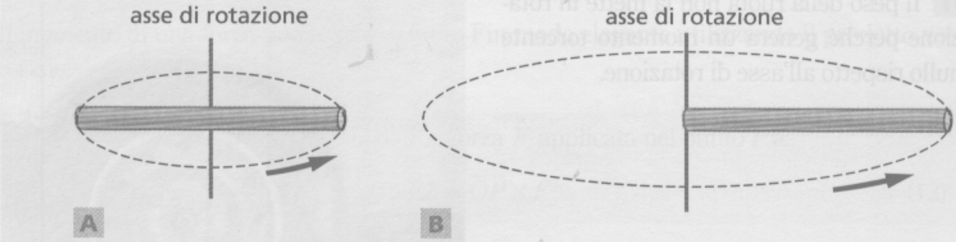
La costante di proporzionalità fra momento torcente e accelerazione angolare dipende dall'entità della massa del corpo rigido e dalla sua disposizione rispetto all'asse di rotazione.

1 Uno stesso momento torcente provoca un'accelerazione angolare maggiore in un frisbee (massa 100 g) rispetto a un disco di atletica (massa 2 kg).


frisbee


disco per atletica

2 Una sbarra è fatta ruotare prima attorno al suo punto medio (A) e poi attorno a un suo estremo (B). Uno stesso momento torcente provoca una maggiore accelerazione angolare nel caso (A).



La relazione tra accelerazione angolare e momento torcente deriva dal secondo principio della dinamica. Per semplicità verifichiamolo nel caso di un corpo di massa m e dimensioni trascurabili che ruota attorno al punto O legato con una fune lunga r e priva di massa.

1 La forza tangenziale $\vec{F}$ dà luogo a un'accelerazione tangenziale di modulo $a = F/m$ e a un'accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{F}{mr} \tag{15}$$

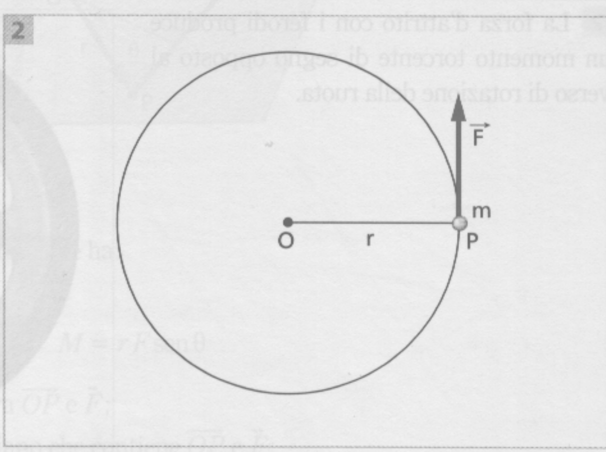
Il momento torcente di $\vec{F}$ è $M = rF$, cioè $F = M/r$. Sostituendo nella (15) otteniamo:

$$\alpha = \frac{M/r}{mr}$$

da cui segue:

$$\alpha = \frac{M}{mr^2} \tag{16}$$

2



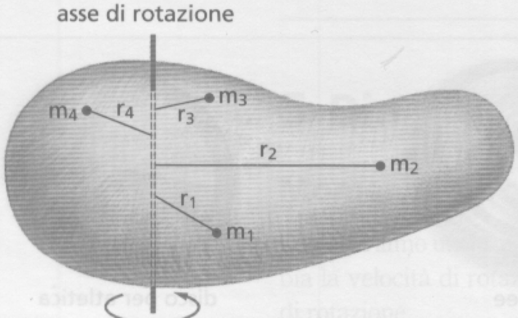
La grandezza $I = mr^2$ è il **momento d'inerzia** della massa m rispetto all'asse passante per O e si misura in $kg \cdot m^2$. La relazione (16) può quindi essere posta nella forma

$$M = I\alpha \tag{17}$$

L'analogia col secondo principio della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$ suggerisce che il momento d'inerzia I è una misura della tendenza di un corpo a opporsi a variazioni della sua velocità angolare.

A differenza del caso lineare, però, l'inerzia rotazionale dipende non solo dalla massa del corpo, ma anche da come essa è disposta attorno all'asse di rotazione.

Il momento d'inerzia I di un corpo rigido rispetto a un asse si può calcolare mediante la seguente procedura:



- si divide il corpo in masse elementari $m_1, m_2, \ldots$
- si calcola il momento angolare di ciascuna di esse:

$$I_1 = m_1 r_1^2, \quad I_2 = m_2 r_2^2, \ldots$$

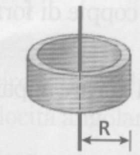
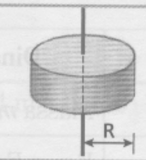
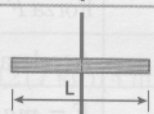
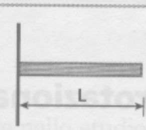
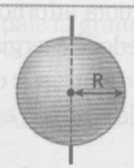
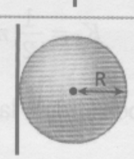
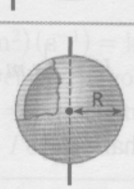
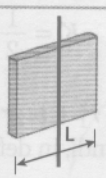
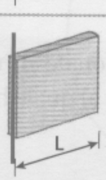
- si calcola la somma di tutti i momenti d'inerzia così ottenuti

$$I = I_1 + I_2 + \ldots$$

Il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse fissato è

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots \tag{18}$$

Determinare in questo modo il momento d'inerzia di un corpo rigido può essere molto laborioso. Per questa ragione ci limitiamo a considerare corpi rigidi che sono ben approssimati da uno dei corpi della tabella seguente.

Momenti d'inerzia di alcuni corpi di massa *m*		
Cilindro o guscio cavo con parete sottile, asse di rotazione coincidente con l'asse del cilindro		$I = mR^2$
Cilindro o disco pieno, asse di rotazione coincidente con l'asse del cilindro		$I = \frac{1}{2}\, mR^2$
Asta sottile, asse di rotazione perpendicolare all'asta e passante per il suo centro		$I = \frac{1}{12}\, mL^2$
Asta sottile, asse di rotazione perpendicolare all'asta e passante per un suo estremo		$I = \frac{1}{3}\, mL^2$
Sfera piena, asse di rotazione passante per il centro		$I = \frac{2}{5}\, mR^2$
Sfera piena, asse di rotazione tangente alla superficie		$I = \frac{7}{5}\, mR^2$
Sfera cava, con parete sottile e asse di rotazione passante per il centro		$I = \frac{2}{3}\, mR^2$
Lamina sottile rettangolare, asse di rotazione parallelo a un lato e passante per il centro dei due lati perpendicolari a esso		$I = \frac{1}{12}\, mL^2$
Lamina sottile rettangolare, asse di rotazione su uno dei lati		$I = \frac{1}{3}\, mL^2$

Il risultato (17) ottenuto per una massa puntiforme può essere generalizzato. Vale infatti il **secondo principio della dinamica per il moto rotazionale**:

il momento d'inerzia I di un corpo rigido, la sua accelerazione angolare a e il momento torcente totale M a cui è sottoposto, calcolati rispetto allo stesso asse, sono tali che

$$M = I\alpha \tag{19}$$

Nell'equazione precedente, il momento totale è quello delle forze esterne al corpo. Infatti le forze interne sono sempre coppie di forze di azione-reazione e i loro momenti si annullano a vicenda.

L'analogia con la dinamica lineare appare evidente quando si confrontano fra loro relazioni corrispondenti:

	Dinamica lineare	Dinamica rotazionale
Inerzia	Massa m	Momento d'inerzia I
Causa del moto	Forza F	Momento torcente M
Effetto	Accelerazione lineare a	Accelerazione angolare α
Legame causa-effetto	$F = ma$	$M = I\alpha$

Energia cinetica rotazionale

Quando un corpo rigido ruota attorno a un asse, le particelle che lo compongono sono in movimento e quindi possiedono energia cinetica. Cosideriamo un corpo rigido che ruota con velocità angolare ω attorno a un asse: ogni sua particella di massa m_i a distanza r_i dall'asse ha una velocità tangenziale $v_i = \omega r_i$ e un'energia cinetica $K_i = (1/2)\, mv_i^2$ tale che

$$K_i = \frac{1}{2}\, m_i (r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}\, m_i r_i^2 \omega^2$$

L'energia cinetica del corpo rigido è la somma delle energie cinetiche di tutte le particelle che lo costituiscono:

$$K = \frac{1}{2}\, m_1 r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}\, m_2 r_2^2 \omega^2 + \ldots$$

Raccogliendo $(1/2)\,\omega^2$ si ha:

$$K = \frac{1}{2}\,(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots)\,\omega^2$$

La somma tra parentesi $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots$ è il momento d'inerzia I del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione. Quindi, in definitiva:

l'**energia cinetica rotazionale** di un corpo rigido che ruota con velocità angolare ω attorno a un asse rispetto al quale ha un momento d'inerzia I è

$$K = \frac{1}{2}\, I\omega^2 \tag{20}$$