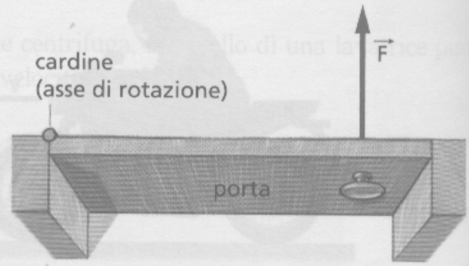
4 Il momento di una forza

Momento di una forza o momento torcente

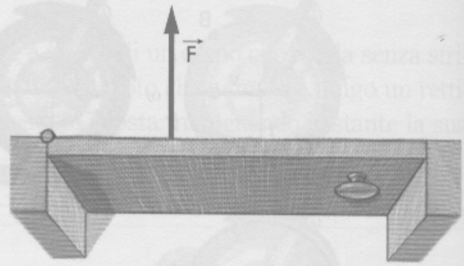
Una forza applicata a un corpo puntiforme lo accelera. Una forza applicata a un corpo rigido può modificarne la velocità di rotazione.

Per analizzare i legami fra la causa (la forza) e l'effetto che produce (la rotazione) consideriamo una porta inizialmente ferma e libera di ruotare attorno all'asse fisso che passa per i suoi cardini.

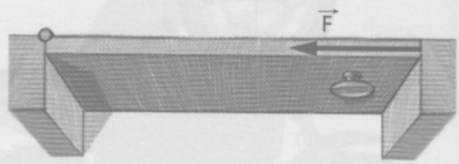
1 La porta ruota tanto più rapidamente quanto più è intensa la forza $\vec{F}$ applicata in un punto.



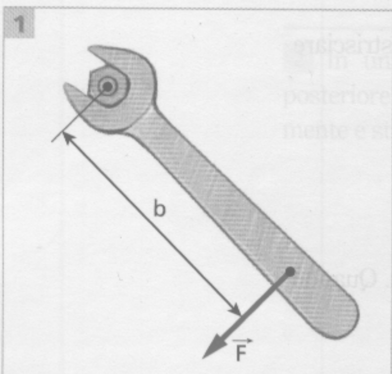
2 Spingendo con la stessa forza $\vec{F}$ in un punto più vicino ai cardini, la porta si apre più lentamente di prima.

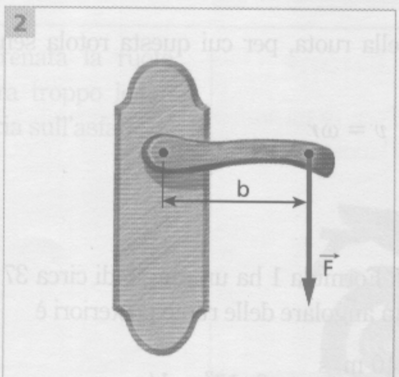


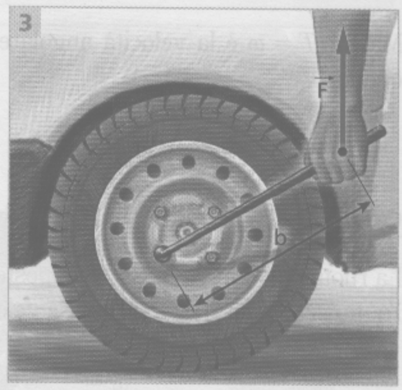
3 Spingendo o tirando in direzione dei cardini, la porta non ruota affatto.



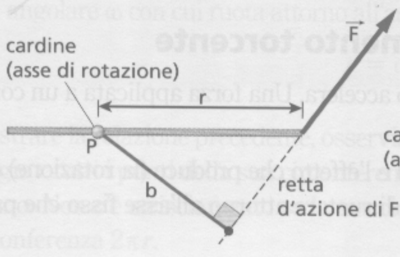
Come suggeriscono gli esempi che seguono, l'effetto di una forza dipende, oltre che dal suo modulo, anche dal suo *braccio* (*b*).

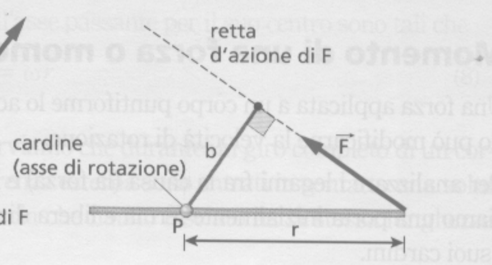




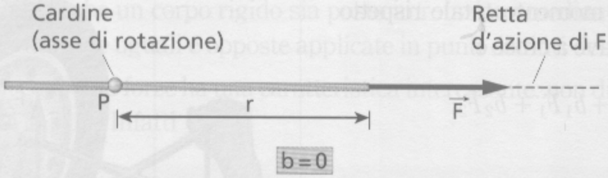


Il **braccio** b di una forza rispetto a un punto P è la distanza fra P e la retta d'azione della forza.





Il braccio è nullo se la retta d'azione della forza passa per l'asse di rotazione.



In conclusione, l'effetto che una forza ha sulla rotazione di un oggetto dipende da una nuova grandezza, il **momento torcente** o **momento della forza**.

Il **momento di una forza** $\vec{F}$ di braccio b è

$$M = bF \tag{9}$$

DENTRO LA FORMULA

- Nel Sistema Internazionale il momento di una forza si misura in *newton · metro* (N · m).
- Anche se è formalmente identica all'unità di misura del lavoro e dell'energia (joule), la natura completamente diversa delle grandezze fisiche energia e momento torcente suggerisce di tenerne distinte le unità di misura: per questa ragione il momento è sempre dato in N · m e mai in J.
- Per convenzione, il segno è considerato *positivo* quando il momento tende a provocare una rotazione in *verso antiorario* attorno all'asse di rotazione e *negativo* quando tende a provocare una rotazione in *verso orario*.
- Il momento di una forza dipende dal punto rispetto al quale si calcola: in genere questo punto si sceglie sull'asse di rotazione del corpo rigido.

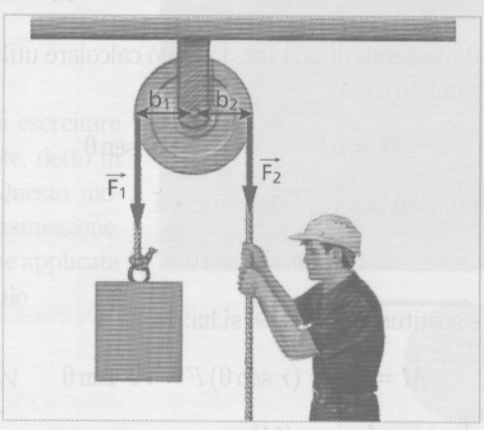
Il momento torcente di più forze

In molte situazioni su un corpo rigido agiscono più forze che tendono a metterlo in rotazione. In questi casi

il momento totale rispetto a un punto P di più forze applicate a un corpo rigido è la somma algebrica dei momenti di ciascuna forza rispetto a P.

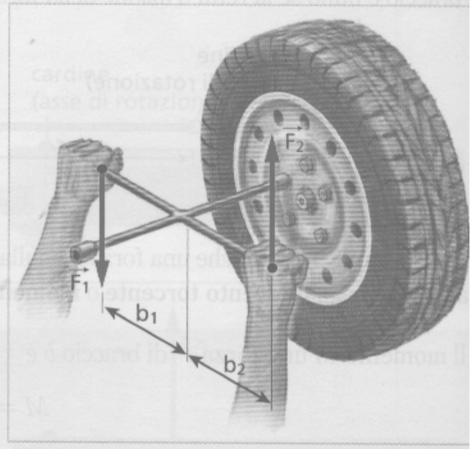
1 La forza dell'uomo e il peso del carico generano momenti con segno opposto. Il momento totale rispetto all'asse della carrucola è

$$M = +b_1F_1 - b_2F_2$$



2 Le due forze hanno momenti con lo stesso segno. Il momento totale rispetto all'asse della chiave a croce è

$$M = +b_1F_1 + b_2F_2$$



Il momento esercitato da una forza rispetto a un asse non dipende dal componente dell forza diretto verso l'asse.

Per verificarlo, scomponiamo la generica forza $\vec{F}$ lungo due direzioni, una diretta vers l'asse di rotazione e l'altra perpendicolare alla prima:

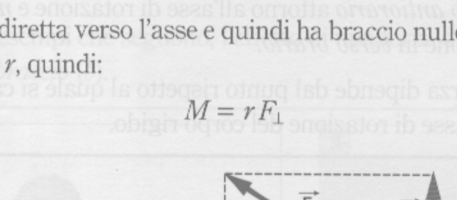
$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$$

Il momento totale è

$$M = M_{\parallel} + M_{\perp}$$

Ma $M_{\parallel} = 0$ perché $\vec{F}_{\parallel}$ è diretta verso l'asse e quindi ha braccio nullo rispetto a esso. Al con trario, il braccio di $\vec{F}_{\perp}$ è r, quindi:

$$M = rF_{\perp} \qquad (10$$



Se θ è l'angolo compreso tra la direzione di $\vec{F}$ e di OA, si ha $F_{\perp} = F \operatorname{sen} \theta$ e quindi

$$M = rF \operatorname{sen} \theta \qquad (11$$

Il momento di una forza si può calcolare utilizzando indifferentemente una delle due rela zioni (9) o (11):

$$M = bF \qquad M = rF \operatorname{sen} \theta$$

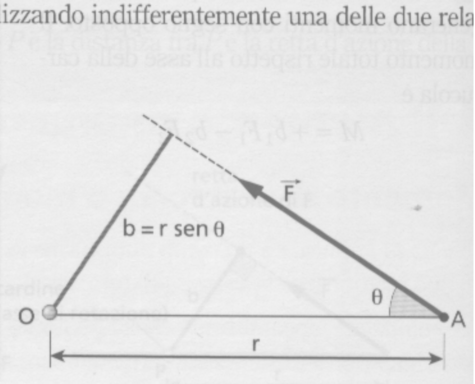
Infatti il braccio b della forza è

$$b = r \operatorname{sen} \theta$$

e sostituendo nella (9) si ha:

$$M = bF = (r \operatorname{sen} \theta)\, F = rF \operatorname{sen} \theta$$

che è la relazione (11).



Momento di una coppia di forze

Capita frequentemente che un corpo rigido sia posto in rotazione mediante una **coppia di forze** formata da due forze uguali e opposte applicate in punti distinti del corpo rigido.

Il momento di una coppia di forze ha una caratteristica interessante: non dipende dal punto rispetto al quale si calcola. Infatti

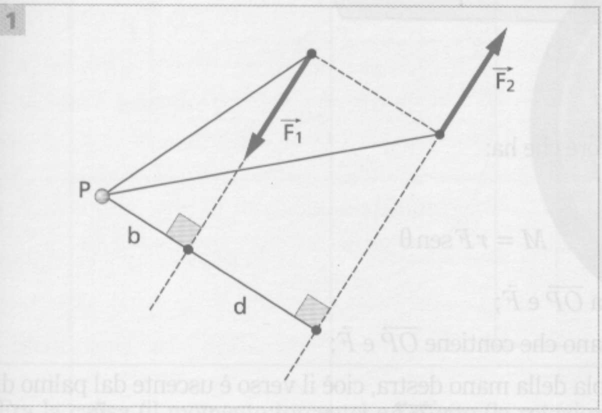
il momento di una coppia di forze con modulo F che agiscono lungo rette parallele distanti d è

$$M = d F \quad (12)$$

Il segno del momento è *positivo* se la coppia pone il corpo rigido in *rotazione antioraria*, *negativo* se la *rotazione* è *oraria*.

Per dimostrarlo, consideriamo due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ che agiscono lungo due direzioni parallele distanti d. Rispetto a un generico punto P, il momento totale M è la somma dei momenti delle singole forze M_1 e M_2. Indichiamo con F il modulo, comune, di $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

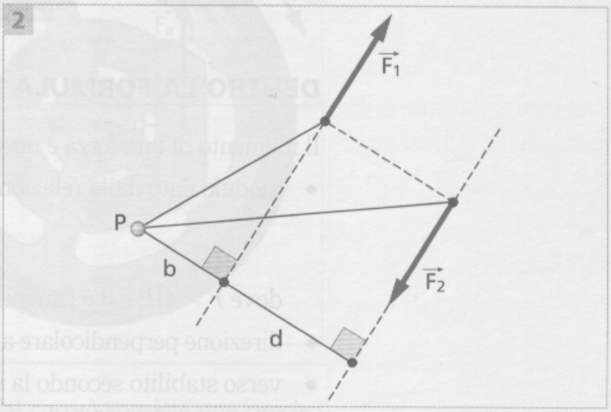
1



$$M = -bF + (b+d)F = Fd$$

Il segno è positivo perché la rotazione indotta dalla coppia è in verso antiorario.

2



$$M = bF - (b+d)F = -Fd$$

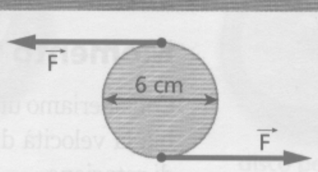
Il segno è negativo perché la rotazione indotta dalla coppia è in verso orario.

Notiamo che nel risultato finale, cioè la relazione (12), non figura il punto P, ma sono presenti solo le due grandezze che caratterizzano la coppia di forze: F e d.

QUANTO? Che coppia!

Il motore della Ferrari 599 GTO è in grado di esercitare sull'asse di trasmissione un momento torcente, detto in questo caso **coppia motrice**, di 620 N · m. Questo momento torcente pone in rotazione l'asse di trasmissione, che ha un diametro di circa 6 cm, come se fosse applicata a esso una coppia di forze tangenziali di modulo

$$F = \frac{M}{d} = \frac{6{,}2 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}}{6 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 1 \cdot 10^4 \text{ N}$$

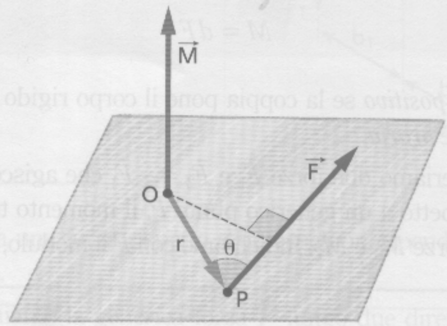


Momento torcente e prodotto vettoriale

Il momento di una forza può essere definito Fin modo elegante utilizzando il prodotto vettoriale:

il momento rispetto a un punto O di una forza $\vec{F}$ applicata nel punto P è

$$\vec{M} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F} \tag{13}$$



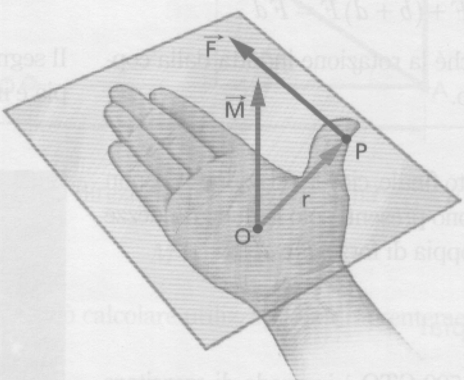
DENTRO LA FORMULA

Il momento di una forza è un vettore che ha:

- modulo dato dalla relazione

$$M = rF \operatorname{sen} \theta$$

  dove $r = OP$ e θ è l'angolo fra $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{F}$;
- direzione perpendicolare al piano che contiene $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{F}$;
- verso stabilito secondo la regola della mano destra, cioè il verso è uscente dal palmo di una mano destra che ha il pollice nel verso di $\overrightarrow{OP}$ e le altre dita nel verso di $\vec{F}$.



5 Dinamica rotazionale

Momento torcente e accelerazione angolare

Consideriamo un corpo rigido libero di ruotare attorno a un asse. L'azione di una forza cambia la velocità di rotazione del corpo solo se genera un momento torcente attorno all'asse di rotazione.