CAPITOLO

5 La dinamica dei corpi in rotazione

Alex Studeny / Shutterstock

1 Grandezze angolari nel moto circolare

SIMULAZIONE

Moto circolare

(PhET, University of Colorado)

Il **moto circolare** è il moto di un corpo che si muove lungo una circonferenza. Nel paragrafo 7 del capitolo «Il moto in due dimensioni» della Cinematica abbiamo analizzato due grandezze lineari del moto circolare uniforme, la velocità e l'accelerazione centripeta. Vediamo ora come descrivere il moto circolare mediante le corrispondenti grandezze angolari.

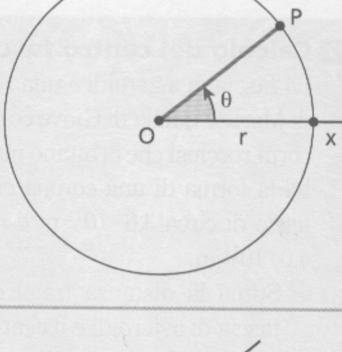
Posizione angolare

Poiché un corpo in moto circolare mantiene costante la sua distanza dal centro della traiettoria, per individuare la sua posizione basta fornire la sua posizione angolare.

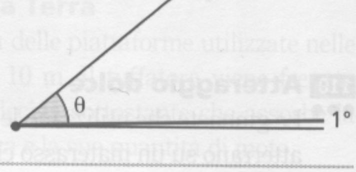
La **posizione angolare** θ è l'angolo che il raggio passante per P forma con una semiretta fissata avente origine nel centro della traiettoria.

Per convenzione, la posizione angolare è *positiva* quando è misurata in *verso antiorario* a partire dalla semiretta di riferimento e *negativa* quando è misurata in *verso orario*.

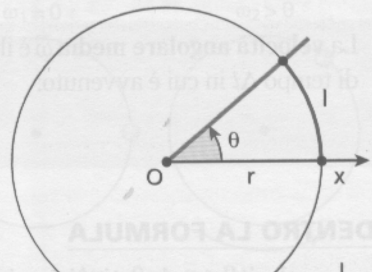
L'ampiezza degli angoli si misura comunemente in *gradi sessagesimali*, ma nel Sistema Internazionale si utilizza il *radiante*.



1 La misura in gradi sessagesimali di un angolo θ si ottiene dal confronto fra due angoli: θ e un angolo di 1°, che è la 360-esima parte dell'angolo giro.



2 La misura in radianti di un angolo θ è il rapporto fra due lunghezze: quella dell'arco staccato da θ su una circonferenza con centro nel vertice di θ e il raggio di quella circonferenza.



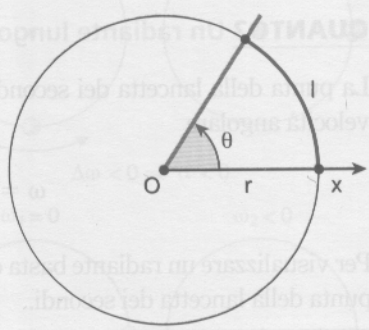
$\theta = \frac{l}{r}$

L'ampiezza di un angolo θ espressa in **radianti** è il rapporto fra la lunghezza *l* dell'arco intercettato dall'angolo su una circonferenza con centro nel vertice e il raggio della circonferenza.

Il rapporto fra due lunghezze è un numero e non ha dimensioni, come invece accade per le lunghezze (metri) o le masse (kilogrammi). L'ampiezza di un angolo in radianti è seguita dall'indicazione *rad* solo per evitare ambiguità.
Dalla definizione segue che un angolo di 1 radiante stacca su una circonferenza un arco di lunghezza uguale al raggio della circonferenza.

Un angolo giro (360°) stacca su una circonferenza di raggio r un arco lungo come la circonferenza stessa, cioè $2\pi r$; quindi la misura in radianti dell'angolo giro è

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$



$\theta = 1\ \text{rad} \Rightarrow l = r$

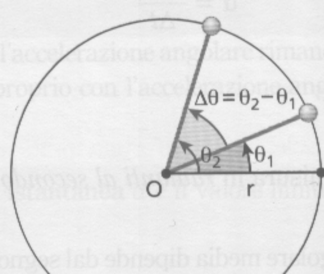
La misura in gradi $\theta°$ e la misura in radianti θ^r di uno stesso angolo sono legate dalla proporzione

$$\theta° : \theta^r = 360 : 2\pi$$

Velocità angolare

La posizione angolare di un corpo che si muove lungo una circonferenza cambia nel tempo.

Si dice **spostamento angolare** $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ la variazione di posizione angolare.



In modo analogo al caso della velocità lineare, si definisce la velocità angolare media.

La **velocità angolare media** $\overline{\omega}$ è il rapporto fra lo spostamento angolare $\Delta\theta$ e l'intervallo di tempo Δt in cui è avvenuto:

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (1)$$

DENTRO LA FORMULA

- La velocità angolare si misura in *radianti al secondo* (rad/s) oppure in s^{-1}.
- Per convenzione $\omega > 0$ quando il movimento lungo la circonferenza avviene in verso antiorario e $\omega < 0$ quando avviene in verso orario.

Quando Δt è molto piccolo, la velocità angolare rimane praticamente invariata durante la misurazione e coincide proprio con la velocità angolare media durante quell'intervallo di tempo. Quindi

la **velocità angolare istantanea** ω è il valore limite a cui tende il rapporto $\Delta\theta/\Delta t$ quando Δt tende a zero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

QUANTO? Un radiante lungo 10 secondi

La punta della lancetta dei secondi di un orologio compie un giro in 60 s, quindi ha una velocità angolare

$$\omega = \frac{2\pi}{6 \cdot 10\ \text{s}} \approx 1 \cdot 10^{-1}\ \text{rad/s}$$

Per visualizzare un radiante basta osservare lo spostamento angolare che in 10 s compie la punta della lancetta dei secondi.

Accelerazione angolare

Quando un corpo in moto circolare cambia la sua velocità angolare è soggetto a un'accelerazione angolare.

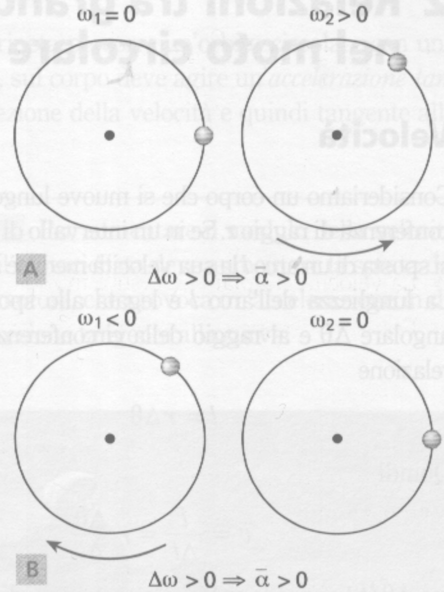
L'**accelerazione angolare media** $\overline{\alpha}$ è il rapporto fra la variazione di velocità angolare $\Delta\omega$ e l'intervallo di tempo Δt in cui è avvenuta:

$$\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (2)$$

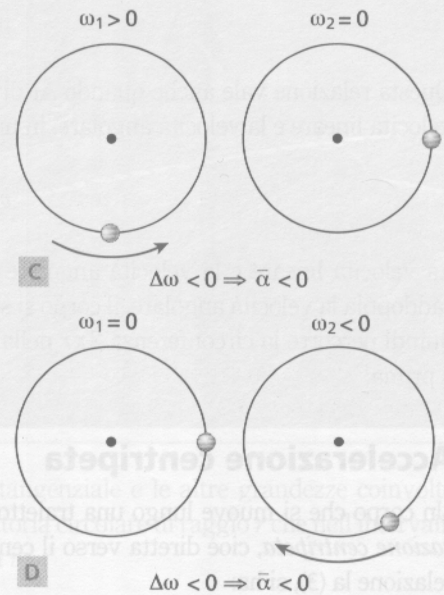
DENTRO LA FORMULA

- L'accelerazione angolare si misura in *radianti al secondo quadrato* (rad/s^2) oppure in s^{-2}.
- Il segno dell'accelerazione angolare media dipende dal segno della variazione della velocità angolare. Consideriamo due istanti successivi del moto circolare di un corpo, in cui le velocità angolari sono rispettivamente ω_1 e ω_2.

1 Quando la velocità angolare finale è maggiore di quella iniziale, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 > 0$, allora l'accelerazione angolare media è positiva, $\bar{\alpha} > 0$.



2 Quando la velocità angolare finale è minore di quella iniziale, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 < 0$, allora l'accelerazione angolare media è negativa, $\bar{\alpha} < 0$.



Quando l'accelerazione angolare ha il segno opposto alla velocità angolare, come nei casi B e C, il corpo rallenta. In questo caso si dice che subisce una *decelerazione angolare*.

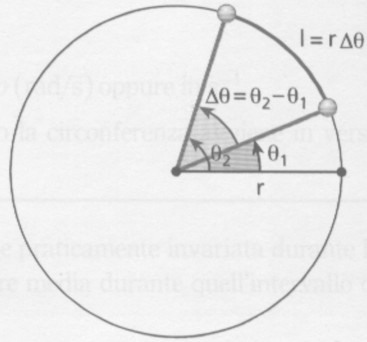
Quando Δt è molto piccolo, l'accelerazione angolare rimane praticamente invariata durante la misurazione e coincide proprio con l'accelerazione angolare media durante quell'intervallo di tempo. Quindi

l'**accelerazione angolare istantanea** α è il valore limite a cui tende il rapporto $\Delta\omega/\Delta t$ quando Δt tende a zero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

2 Relazioni tra grandezze angolari e lineari nel moto circolare

Velocità



Consideriamo un corpo che si muove lungo una circonferenza di raggio r. Se in un intervallo di tempo Δt si sposta di un arco l la sua velocità media è $\bar{v} = l/\Delta t$. La lunghezza dell'arco l è legata allo spostamento angolare $\Delta\theta$ e al raggio della circonferenza r dalla relazione

$$l = r\Delta\theta$$

Quindi

$$\bar{v} = \frac{l}{\Delta t} = r\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

ma $\Delta\theta/\Delta t = \bar{\omega}$ è la velocità angolare media nell'intervallo di tempo Δt, pertanto:

$$\bar{v} = \bar{\omega} r$$

Questa relazione vale anche quando Δt diventa molto piccolo, per cui concludiamo che la velocità lineare e la velocità angolare, in un moto circolare, sono legate dalla relazione

$$v = \omega r \tag{3}$$

La velocità lineare e la velocità angolare sono grandezze direttamente proporzionali. Se raddoppia la velocità angolare, il corpo si sposta di un angolo giro 2π nella metà del tempo, quindi percorre la circonferenza $2\pi r$ nella metà del tempo, cioè a velocità doppia rispetto a prima.

Accelerazione centripeta

Un corpo che si muove lungo una traiettoria circolare di raggio r è soggetto a un'*accelerazione centripeta*, cioè diretta verso il centro, di modulo $a_c = v^2/r$. Sostituendo in questa relazione la (3), si ha:

$$a_c = \frac{(\omega r)^2}{r}$$

ossia

$$a_c = \omega^2 r \tag{4}$$

QUANTO? L'accelerazione centripeta della Terra

La Terra si muove attorno al Sole lungo un'orbita praticamente circolare di raggio $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m in un anno, cioè in $3{,}15 \cdot 10^7$ s, per effetto di un'accelerazione centripeta

$$a_c = \left(\frac{2\pi}{3{,}15 \cdot 10^7\ \text{s}}\right)^2 (1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}) \approx 6 \cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

Accelerazione tangenziale

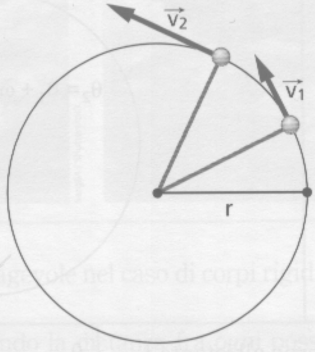
Un corpo soggetto alla sola accelerazione centripeta percorre un'orbita circolare con una velocità di modulo costante v. Per modificare v, sul corpo deve agire un'*accelerazione tangenziale* a_t, diretta in ogni istante lungo la direzione della velocità e quindi tangente alla traiettoria.

1 Lungo il tratto circolare di una curva percorsa a velocità costante (in modulo) il motociclista risente solo dell'accelerazione centripeta esercitata dall'attrito con la pista.

2 Per aumentare il modulo della velocità il motociclista deve aumentare la spinta del motore, che provoca un'accelerazione in direzione tangente alla curva.

Massimo Romeni

Per determinare il legame fra l'accelerazione tangenziale e le altre grandezze coinvolte, consideriamo un corpo in moto lungo una traiettoria circolare di raggio r che nell'intervallo di tempo Δt passa dalla velocità $\vec{v}_1$ alla velocità $\vec{v}_2$.



La variazione del modulo della velocità è $\Delta v = v_2 - v_1$ e, ricordando la relazione $v = \omega r$, può essere scritta come:

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \omega_2 r - \omega_1 r = (\omega_2 - \omega_1)\, r$$

In generale valgono le seguenti *relazioni cinematiche*.

Moto rettilineo	Moto circolare
Velocità lineare costante	***Velocità angolare costante***
$x = x_0 + vt$	$\theta = \theta_0 + \omega t$
Accelerazione lineare costante Posizione iniziale x_0 Velocità iniziale v_0	***Accelerazione angolare costante*** Posizione angolare iniziale θ_0 Velocità angolare iniziale ω_0
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$

3 I corpi rigidi e il moto rotatorio

Il corpo rigido

I moti dei corpi estesi che osserviamo quotidianamente sono molto complicati da descrivere perché in genere si modifica la loro forma durante il moto, come per esempio succede nel caso di nuvole in movimento.

La descrizione del moto è più agevole nel caso di corpi rigidi.

Un **corpo** si dice **rigido** quando la distanza fra ogni possibile coppia di punti rimane costante.

Poiché tutti i corpi si deformano quando sono sottoposti a forze, in pratica si considera rigido ogni corpo che abbia deformazioni trascurabili durante il periodo di osservazione.