# Cinematica e dinamica del moto circolare uniformemente accelerato

Fino a questo punto abbiamo preso in considerazione moti circolari caratterizzati da velocità tangenziali di modulo costante.

Non ci vuol molto però a pensare che ciò che si sta muovendo in questo momento di moto uniforme era probabilmente fermo qualche istante prima.

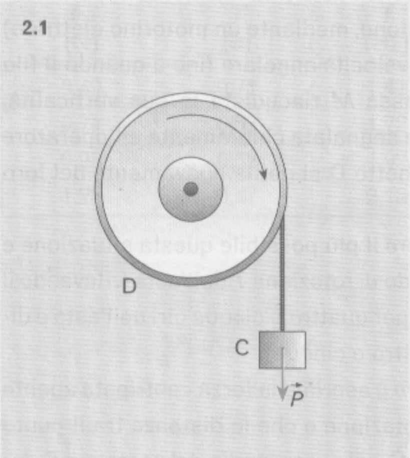
Si pensi, ad esempio, a una puleggia che ruota attorno al proprio asse sotto l'azione di un peso fissato all'estremità di una fune avvolta su di essa (fig. 2.1) oppure al movimento di uno yo-yo che scende e sale mediante una opportuna azione di chi lo sostiene.

Di che tipo sarà il moto di un qualsiasi punto posto sul bordo della puleggia? Come si può intuire, la velocità del punto non potrà essere costante neppure in modulo, perché il corpo, cadendo con velocità sempre maggiore sotto l'azione della gravità, trascinerà in moto sempre più veloce anche i punti del bordo della ruota.

L'analisi del moto circolare non può dunque dirsi completa se non viene estesa anche a situazioni nelle quali la velocità tangenziale (o angolare) del corpo in rotazione può variare.

In linea di principio non ci sono limiti al tipo di variazione della velocità; tuttavia, per semplicità, ci limiteremo a esaminare il solo caso (molto frequente) in cui la velocità tangenziale varia proporzionalmente al tempo, ovvero il caso del moto circolare uniformemente accelerato.

2.1




[ *Fig. 2.1* ]
Sulla puleggia è avvolta una fune al cui estremo è fissato un corpo C. Quale sarà il movimento che anima un punto posto sul bordo della puleggia?

## 2.1 Cinematica del moto circolare uniformemente accelerato

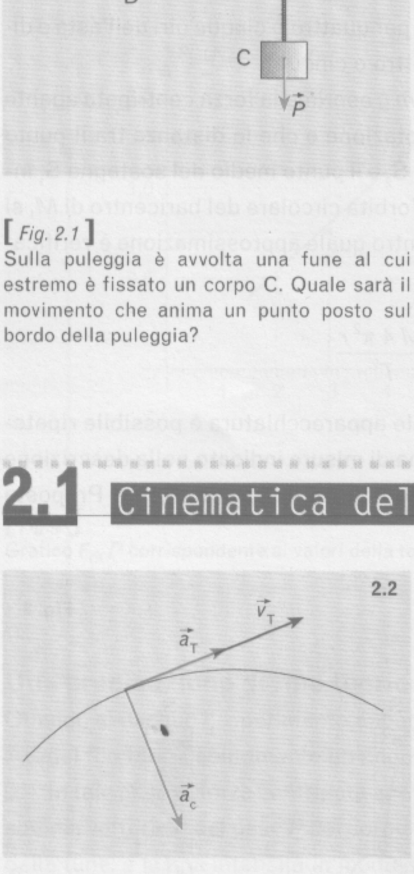
Si definisce **moto circolare uniformemente accelerato** *il moto di un punto che percorre una traiettoria circolare con accelerazione tangenziale costante.*

Si osservi che l'accelerazione della quale si parla non è l'accelerazione centripeta nominata molte volte nelle precedenti Unità, ma l'*accelerazione lungo la traiettoria stessa*, che è quindi sempre *tangente* all'arco di circonferenza descritto dal punto in moto.

Si veda in proposito la figura 2.2 nella quale sono stati disegnati:

- il vettore $\vec{v}_T$ che rappresenta la velocità istantanea del punto in moto;
- il vettore $\vec{a}_C$ associato a tale velocità;
- il vettore $\vec{a}_T$ tangente alla traiettoria.

2.2




[ *Fig. 2.2* ]
Rappresentazione dei vettori velocità tangenziale $\vec{v}_T$, accelerazione centripeta $\vec{a}_C$, accelerazione tangenziale $\vec{a}_T$ in un moto circolare dotato di accelerazione tangenziale. Il vettore $\vec{a}_T$ conserverà la stessa lunghezza durante il moto del corpo mentre $\vec{v}_T$ e $\vec{a}_C$ aumenteranno.

La presenza di un'accelerazione tangente alla traiettoria fa sì che gli archi percorsi in successivi intervalli di tempo non seguano più la legge del moto uniforme:

$$\textit{arco percorso} = l = v_T\, t \qquad [2.1]$$

ma quella del moto uniformemente accelerato:

$$\textit{arco percorso} = l = \frac{1}{2}\, a_T\, t^2 \qquad [2.2]$$

La relazione [2.2] è rappresentata nel grafico in basso nella figura 2.3. In alto compare invece la rappresentazione dell'ampiezza degli archi percorsi in successivi intervalli identici di tempo.

Si noti che l'ampiezza dei successivi archi cresce linearmente al trascorrere degli intervalli di tempo, coerentemente al fatto che la velocità tangenziale del punto cresce anch'essa con il tempo secondo la relazione:

$$v_T = a_T\, t \qquad [2.3]$$

Se si tiene conto della corrispondenza (illustrata nello specchietto seguente) fra le grandezze lineari e le grandezze angolari:

| grandezze lineari | grandezze angolari |
|---|---|
| lunghezza $l$ dell'arco descritto | ampiezza $\alpha$ dell'angolo che sottende l'arco $l$ descritto |
| velocità tangenziale $v_T$ | velocità angolare $\omega$ |
| accelerazione tangenziale $a_T$ | accelerazione angolare $\vartheta$ |

si deducono immediatamente le relazioni:

$$l = \alpha r \qquad v_T = \omega r \qquad a_T = \vartheta r$$

Sostituendo le espressioni ora ricavate di $l$, $v_T$ e $a_T$ nelle relazioni [2.2] e [2.3] si ottiene allora:

$$l = \frac{1}{2}\, a_T t^2 \Rightarrow \alpha r = \frac{1}{2}\, \vartheta r t^2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\, \vartheta t^2 \qquad [2.4]$$

$$v_T = a_T\, t \Rightarrow \omega r = \vartheta r t \Rightarrow \omega = \vartheta t \qquad [2.5]$$

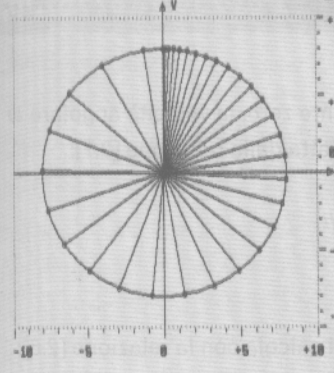
Se, più in generale, il punto in moto è dotato di una velocità angolare iniziale $\omega_i$ le relazioni [2.4] e [2.5] si completano nel modo seguente:

$$\alpha = \omega_i t + \frac{1}{2}\, \vartheta t^2 \qquad [2.6]$$

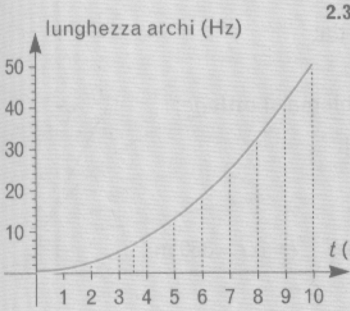
$$\omega = \omega_i + \vartheta t \qquad [2.7]$$

Si noti che *in un moto circolare uniformemente accelerato, l'accelerazione centripeta non è più una costante perché non è più costante la velocità tangenziale del punto in moto.* Si veda in proposito la figura 2.4, nella quale sono riprodotti i vettori $\vec{a}_T$ (*accelerazione tangenziale*) e $\vec{a}_C$ (*accelerazione centripeta*) al trascorrere del tempo. La figura mostra anche che ora l'accelerazione risultante del punto in moto non è più centripeta, dovendosi sommare alla componente centripeta $\vec{a}_C$ la componente tangenziale $\vec{a}_T$.

2.3.a



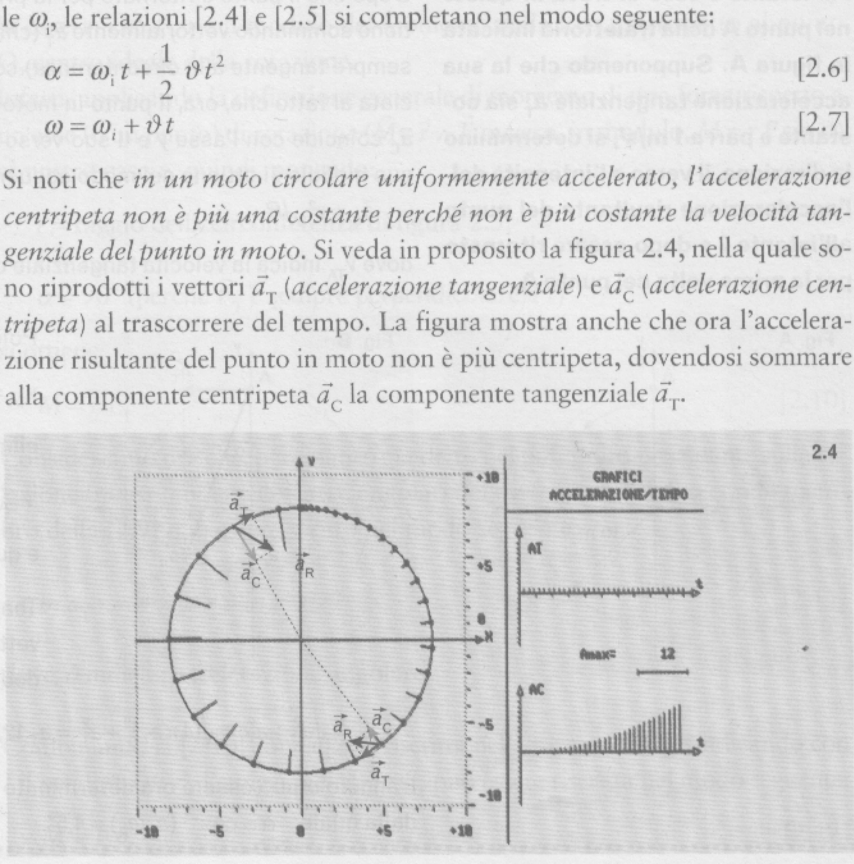

2.3.b




[ *Fig. 2.3* ]
a. Rappresentazione delle successive posizioni di un punto in moto circolare uniformemente accelerato; $a_T = 1$ m/s²; velocità iniziale = 0; $r = 8$ m; intervallo di tempo = 0,3 s.
b. Rappresentazione della dipendenza *lunghezza arco percorso-tempo.*

> La figura 2.4 mostra che $\vec{a}_C$ e $\vec{a}_T$ si compongono in una accelerazione risultante $\vec{a}_R$ non più centripeta. Si osservi che, reciprocamente, se il punto P in moto su una traiettoria circolare è animato da una accelerazione non centripeta, è possibile scomporre il vettore accelerazione in due componenti: la componente tangenziale alla traiettoria (quindi parallela al vettore velocità), che è responsabile della variazione in modulo di $\vec{v}$, e la componente centripeta, che determina il cambiamento di direzione di $\vec{v}$. <

2.4




[ *Fig. 2.4* ]
Moto circolare uniformemente accelerato. Rappresentazione delle accelerazioni centripeta e tangenziale in funzione del tempo (l'accelerazione tangenziale, assunta in questa simulazione pari a 1 m/s², viene scarsamente evidenziata nella figura perché troppo piccola rispetto all'accelerazione centripeta). A sinistra sono riportati due esempi di composizioni vettoriali con $\vec{a}_T$ ingrandita.

**Problema 1**

**Un punto si muove su una circonferenza di raggio $r$ con un'accelerazione tangenziale $a_T$ costante. La sua velocità angolare nel generico istante $t$ risulta pari a $\omega$.**
**Si determinino l'espressione della velocità angolare all'istante zero e la lunghezza dell'arco percorso nell'intervallo di tempo $(t - 0)$. Si applichino poi le espressioni individuate al caso particolare nel quale $a_T = 0{,}2$ m/s², $t = 20$ s, $\omega = 20$ [rad]/s, $r = 1$ m.**

**Soluzione**

La relazione fra la velocità angolare $\omega_i$ all'istante zero, la velocità angolare $\omega$ all'istante $t$ e l'accelerazione angolare $\vartheta$ è tradotta dalla relazione [2.7]:

$$\omega = \omega_i + \vartheta t$$

dove $\vartheta$ è collegata ad $a_T$ dalla relazione $\vartheta = a_T/r$.
Si ottiene allora:

$$\omega_i = \omega - \vartheta t = \omega - \frac{a_T}{r} t$$

L'ampiezza dell'angolo descritto nel tempo $t$ si calcola con la relazione [2.6]:

$$\alpha = \omega_i t + \frac{1}{2} \vartheta t^2$$

Infine la lunghezza dell'arco descritto è data da:

$$l = \alpha r$$

Utilizzando ora i dati forniti dal testo del problema si ottiene:

$$\vartheta = \frac{a_T}{r} = 0{,}2 \frac{[\text{rad}]}{\text{s}^2} \qquad \omega_i = \omega - \vartheta t = 16 \frac{[\text{rad}]}{\text{s}}$$

Inoltre: $\alpha = \omega_i t + \frac{1}{2} \vartheta t^2 = 360$ [rad] e perciò: $l = \alpha r = 360$ m

**Problema 2**

**Un punto materiale esegue un moto circolare uniformemente accelerato su una circonferenza di raggio 10 m. All'istante 0 esso si trova in quiete nel punto A della traiettoria indicata in figura A. Supponendo che la sua accelerazione tangenziale $a_T$ sia costante e pari a 1 m/s², si determinino la direzione, il verso e l'intensità dell'accelerazione risultante del punto all'istante 0 e dopo essere ritornato per la prima volta nel punto A.**

**Soluzione**

Per quanto riguarda l'accelerazione risultante $\vec{a}_R$ all'istante zero, la risposta è molto semplice: $\vec{a}_R$ coincide con $\vec{a}_T$ e quindi $\vec{a}_R = 1$ m/s², la sua direzione coincide con la tangente in A alla circonferenza e punta verso destra.
Dopo che il punto è ritornato per la prima volta in A, l'accelerazione $\vec{a}_R$ si ottiene sommando vettorialmente $\vec{a}_T$ (che ha mantenuto il valore iniziale e che è sempre tangente alla circonferenza) con l'accelerazione centripeta $\vec{a}_C$, associata al fatto che, ora, il punto in moto possiede una velocità. La direzione di $\vec{a}_C$ coincide con l'asse $y$ e il suo verso punta al centro della circonferenza. Il suo modulo si ottiene nel modo seguente:

$$\vec{a}_C = v^2_{TA}/R$$

dove $v_{TA}$ indica la velocità tangenziale del punto in A dopo il primo giro.

Fig. A

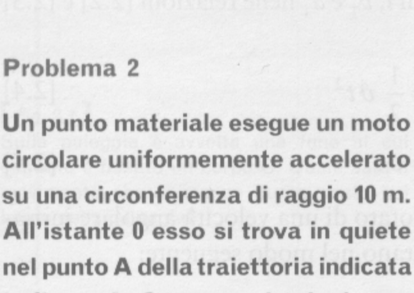
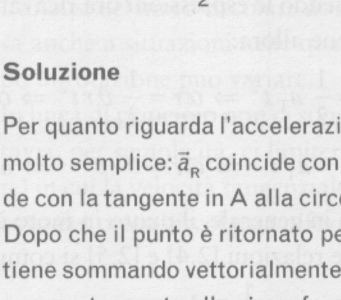



Fig. B




Poiché valgono le relazioni:

$$v_{TA} = a_T t \quad \text{[a]} \qquad 2\pi R = \frac{1}{2} a_T t^2 \quad \text{[b]}$$

eliminando da esse il tempo si ottiene:

$$v_{TA} = \sqrt{4\pi R a_T}$$

e quindi: $a_C = 4\pi R a_T/R = 4\pi a_T$

Tenendo conto della rappresentazione vettoriale di $\vec{a}_C$ e $\vec{a}_T$ indicata in figura B si deduce che:

$$a_R = \sqrt{a_C^2 + a_T^2} = \sqrt{(4\pi a_T)^2 + a_T^2} = a_T\, 12{,}6 = 12{,}6 \text{ m/s}^2$$

L'angolo $\alpha$ può essere ora determinato mediante la relazione: $a_C = a_R \cos \alpha$ dalla quale: $\alpha = \cos^{-1} (a_C/a_R) = 4{,}5°$.

**3** Un corpo compie un moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio $r = 50$ cm con frequenza $f = 4$ Hz. Calcolare la sua velocità periferica $v$ e la sua velocità angolare $\omega$.

[$v = 12{,}56$ m/s; $\omega = 25{,}13$ [rad]/s]

**4** Un corpo compie un moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio $R$ con velocità angolare $\omega = 15{,}7$ [rad]/s. Calcolare il periodo del moto e il tempo impiegato a percorrere un arco lungo 10 $R$.

[$T = 0{,}4$ s; $t = 1{,}27$ s]

**5** Un punto materiale si muove con velocità tangenziale costante su una circonferenza. In 4 s esso percorre un arco lungo 12,56 m.
Sapendo che la frequenza del moto vale 2 Hz, calcolare il raggio $R$ della circonferenza e l'accelerazione centripeta del punto.

[$R = 0{,}25$ m; $a_C = 39{,}4$ m/s²]

**6** Un'elica di aereo compie 40 giri al secondo e ha un raggio di 1,5 m.
Determinare il periodo di rotazione, la velocità angolare e la velocità tangenziale di un punto posto sul bordo estremo dell'elica.

[$T = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ s; $\omega = 251$ [rad]/s; $v = 377$ m/s]

**7** La ruota di una bicicletta di raggio 40 cm è dotata di velocità angolare pari a 5 [rad] s$^{-1}$.
Determinare il numero di giri che essa compie in 6 minuti e la velocità di un punto del copertone.

[n° giri = 286,5; $v = 2$ m/s]

**8** Un punto si muove di moto circolare uniforme percorrendo un angolo di 60° in 2,4 s. Calcolare il periodo del moto.

[$T = 14{,}4$ s]

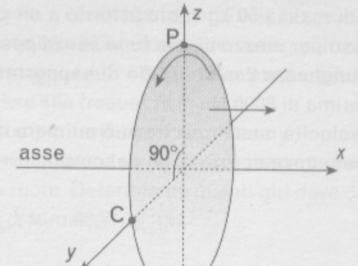
**9** Un ciclista si muove con velocità costante di 10 m/s rispetto alla strada. Le ruote della sua bicicletta hanno un raggio di 0,5 m.
Determinare la loro frequenza di rotazione, la velocità angolare di un punto del bordo della ruota e la sua accelerazione centripeta riferita all'asse della ruota.

[$f = 3{,}18$ Hz; $\omega = 20$ [rad]/s; $a_C = 200$ m/s²]

**10** Un'auto percorre una curva, a forma di arco di circonferenza, con velocità costante; una seconda auto la percorre con velocità doppia.
Determinare il rapporto tra le accelerazioni centripete delle due auto.

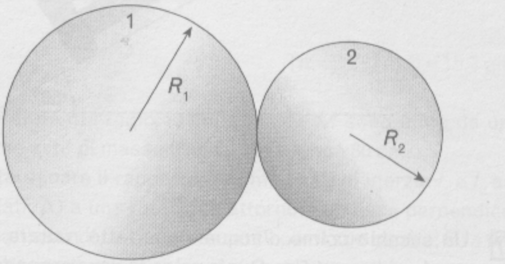
[$a_{C1}/a_{C2} = 0{,}25$]

**11** Il centro di una ruota disposta perpendicolarmente a un asse orizzontale ($x$) si muove lungo l'asse stesso con velocità costante $v_T$ di 10 m/s. Nel frattempo la ruota gira su se stessa attorno all'asse con una frequenza $f$ di 2 giri/s. Il raggio della ruota vale $R = 0{,}5$ m. Determinare la direzione della velocità del punto P della ruota che, a un certo istante, si trova più in alto e del punto C che si trova ruotato di 90° rispetto a questo (vedi figura).




[$v_P = 11{,}8$ m/s; $\vec{v}_P$ è disposta nel piano orizzontale passant
per P e forma con la direzione dell'asse $y$ un angol
di 57,9°. Il modulo di $\vec{v}_C$ è uguale a $v_P$ e $\vec{v}_C$ giace nel pian
verticale passante per C e forma, rispetto alla vertical
in C, un angolo di 57,9

**12** Due ruote sono poste a contatto fra loro in modo che il mot dell'una sia trasferito, senza alcuno slittamento, al moto de l'altra. Determinare il rapporto fra le frequenze di rotazion delle due ruote, fra le velocità periferiche dei loro bordi fra le accelerazioni centripete dei loro punti periferici.

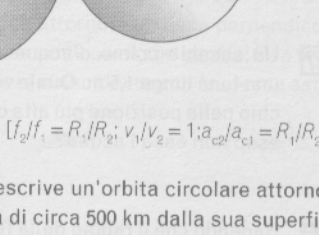



[$f_2/f_1 = R_1/R_2$; $v_1/v_2 = 1$; $a_{c2}/a_{c1} = R_1/R_$

**13** Si sa che un satellite descrive un'orbita circolare attorn alla Terra a una distanza di circa 500 km dalla sua superfi cie in circa 98 minuti.
Determinare la frequenza di rotazione del satellite, la sua ve locità angolare e periferica, la sua accelerazione centripeta

[$f = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$ Hz; $\omega = 1{,}07 \cdot 10^{-3}$ [rad]/s
$v = 7{,}38 \cdot 10^3$ m/s; $a_C = 7{,}9$ m/s

**14** La ruota di una bicicletta tenuta sollevata da terra (vedi figu ra) viene fatta girare in senso orario con la frequenza di 1 H e, improvvisamente, perde un catarifrangente laterale che era fissato su un suo raggio, a 30 cm dal suo asse di rotazio ne. Nell'istante in cui il catarifrangente si stacca dal raggio, questo si trova nella posizione rappresentata in figura. Determinare in quale punto del pavimento cade il catarifrangente valutandone la distanza dal punto O.

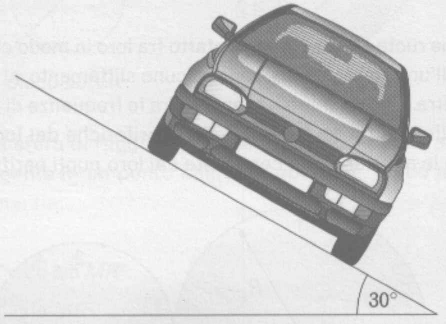



[0,78 m a destra di O

**15** Un corpo di massa 50 kg ruota attorno a un punto O legato ad esso per mezzo di una fune senza peso, inestensibile, di lunghezza 2 m, in grado di sopportare una tensione massima di 8000 N.
Qual è la velocità massima che può animare il corpo?
A quale frequenza di rotazione del corpo corrisponde?

[$v_{max} \leq 17{,}89$ m/s; $f_{max} \leq 1{,}42$ Hz]

**16** Un'automobile affronta una curva di raggio costante pari a 50 m, il cui piano è inclinato di 30° come in figura.
Determinare la velocità dell'automezzo che gli consente di affrontare la curva senza sbandamenti, anche in assenza di attriti con il piano stradale.




[$v = 16{,}82$ m/s]

**17** Un secchio colmo d'acqua viene fatto ruotare mediante una fune lunga 1,5 m. Quale velocità deve possedere il secchio nella posizione più alta della sua traiettoria perché da esso non esca l'acqua?

[$v = 3{,}83$ m/s]

**18** Sapendo che il raggio della Terra è 6400 km, quale variazione percentuale subisce il peso apparente di un oggetto quando lo si porta dall'equatore al polo?
(Supporre la Terra perfettamente sferica).

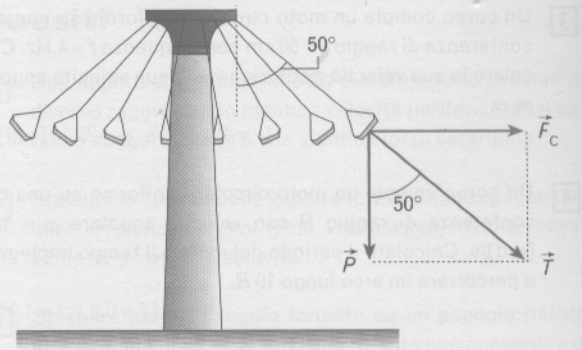
[0,35%]

**19** Si considerino due punti della superficie terrestre, uno A posto all'equatore, l'altro B posto sul parallelo a 45° di latitudine Nord.
Determinare il rapporto tra le loro velocità angolari e le loro velocità tangenziali e il rapporto tra le accelerazioni centripete.

[$\omega_A/\omega_B = 1$; $v_A/v_B = 1{,}41$; $a_{CA}/a_{CB} = 1{,}41$]

**20** Un corpo ruota su una giostra come quella illustrata in figura. La lunghezza dei bracci della giostra è di 5 m.
Determinare la velocità angolare con la quale la giostra deve ruotare perché $\alpha = 50°$.
Determinare, inoltre, la tensione $T$ della fune che sorregge il corpo (ignorando il peso della fune stessa), sapendo che il corpo ha una massa di 50 kg.

[$\omega = 1{,}53$ [rad]/s; $T = 736$ N]

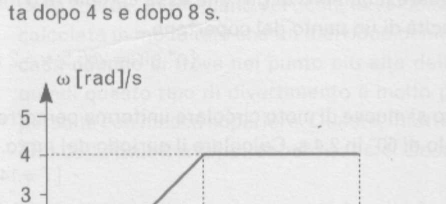



**21** Un'automobile sta eseguendo una curva a raggio $R$ costante alla velocità di 20 m/s. Sul soffitto dell'abitacolo è posto un pendolino lungo 20 cm che, durante la curva, forma un angolo di 30° rispetto alla verticale.
Determinare il valore di $R$. Stabilire, inoltre, quale deve essere il minimo coefficiente di attrito $k$ che, in quelle condizioni di moto, consente l'esecuzione della curva senza slittamenti.

[$R = 70{,}7$ m; $k \geqslant 0{,}58$]

# Unità 2

**22** Il grafico velocità angolare-tempo relativo al moto di una ruota di raggio 0,5 m è rappresentato in figura. Determinare lo spazio percorso da un punto della periferia della ruota dopo 4 s e dopo 8 s.




[s (4 s) = 4 m; s (8 s) = 12 m]

**23** Una ruota passa dalla frequenza $f_1$ pari a 10 giri/s alla frequenza $f_2$ di 30 giri/s con accelerazione angolare costante. Determinare il valore di tale accelerazione e il numero di giri eseguiti nei 10 s di accelerazione.

[accelerazione angolare = 12,56 [rad]/s²; 200 giri]

**24** Una ruota A di raggio $r_A = 0{,}1$ m viene collegata mediante una cinghia a una seconda ruota B di raggio $r_B = 0{,}2$ m. Le due ruote sono inizialmente ferme. All'istante zero, la ruota A inizia a muoversi con moto circolare uniformemente accelerato, caratterizzato da una accelerazione $\theta_A = 2$ [rad]/s².
Determinare:
– l'accelerazione $\vartheta_B$ della ruota B;
– la velocità angolare $\omega_A$ e $\omega_B$ delle due ruote dopo 10 s;

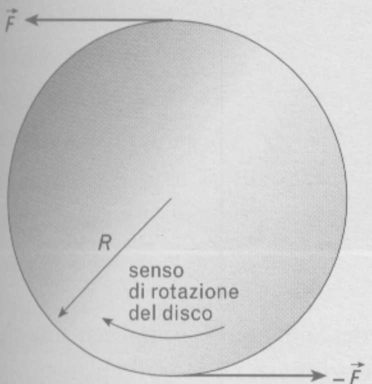
– gli angoli $\alpha_A$ e $\alpha_B$ da esse descritti nello stesso tempo.

[$\vartheta_B = 1$ [rad]/s²; $\omega_A = 20$ [rad]/s; $\omega_B = 10$ [rad]/s; $\alpha_A = 100$ [rad]; $\alpha_B = 50$ [rad]]

**25** Un corpo di massa $m = 1$ kg sta ruotando su una circonferenza di raggio $r = 1$ m alla velocità $v_{T1} = 1$ m/s. Su di esso viene applicata una forza tangenziale $F_T$ di 1 N per un tempo $\Delta t$ pari a 1 s. Determinare la velocità tangenziale $v_{T2}$ acquisita al termine dell'intervallo di tempo $\Delta t$ e l'incremento di forza centripeta che si rende necessario per mantenere il corpo sulla sua traiettoria circolare.

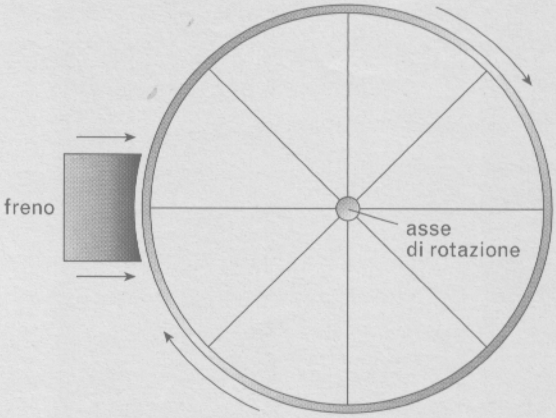
[$v_{T2} = 2$ m/s; incremento $F_C = 3$ N]

**26** Un disco di massa $M = 10^3$ kg e raggio $R = 1$ m sta ruotando con la frequenza $f = 3$ Hz. A un certo istante, sulla sua periferia si applica una coppia di forze frenanti la cui intensità vale $F = 100$ N. Determinare l'angolo $\alpha$ descritto dal disco prima di fermarsi e il tempo $t$ impiegato per descrivere tale angolo.




[$\alpha = 444$ [rad]; $t = 47{,}1$ s]

**27** Una ruota è costituita da un anello di spessore trascurabile di massa $M = 20$ kg, sostenuto da raggi di massa trascurabile e di lunghezza $R = 0{,}5$ m. Essa sta ruotando attorno al proprio asse alla frequenza di 5 Hz.
Alla sua periferia viene accostata una piastra con la quale essa sviluppa una forza di attrito radente pari a 50 N tangente alla ruota. Determinare quanti giri deve compiere la ruota prima di fermarsi.




[$\alpha = 98{,}7$ [rad] = 15,7 giri]

**28** Due sfere di raggio 10 cm e massa $M$ sono unite da una sottile asta di massa trascurabile lunga 80 cm.
Determinare il rapporto fra i momenti di inerzia $I_1$ e $I_2$ associati: A) a una rotazione attorno a un asse perpendicolare all'asta di unione e passante per il suo centro; B) a una rotazione attorno a un asse coincidente con la stessa asta di unione.

[$I_1/I_2 = 63{,}5$]