Esempio 4.4

Si trovi l'accelerazione di un blocco di massa m che scende strisciando lungo una superficie fissa priva d'attrito, inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale.

Vi sono solo due forze che agiscono sul blocco, il peso $\mathbf{P}$ e la forza normale $\mathbf{F}_n$ esercitata dal piano inclinato (vedi figura 4.10). (Per le superfici reali si dovrebbe considerare anche una forza d'attrito parallela al piano inclinato, ma qui abbiamo supposto che la superficie sia priva di attrito.) Poiché le due forze non hanno la stessa direzione, esse non possono farsi equilibrio e il blocco deve quindi accelerare. L'accelerazione è lungo il piano inclinato, che è un altro esempio di vincolo. Per questo problema conviene scegliere un sistema di coordinate con un asse parallelo al piano inclinato e l'altro perpendicolare a esso, com'è mostrato nella figura 4.10. Quindi l'accelerazione ha solo una componente, a_x. Con questa scelta degli assi, $\mathbf{F}_n$ è diretta secondo l'asse y, e il peso $\mathbf{P}$ ha le componenti

$$P_x = \mathrm{P} \sin\theta = mg \sin\theta$$
$$P_y = -P\cos\theta = -mg\cos\theta \qquad 4.9$$

dove m è la massa e g è l'accelerazione di gravità (vedi figura 4.11).

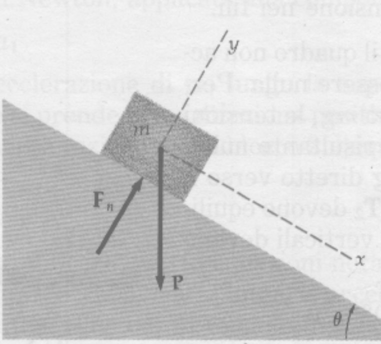


Figura 4.10. Le forze che agiscono su un blocco di massa m che si trova su un piano inclinato privo d'attrito; conviene scegliere l'asse x parallelo al piano inclinato.

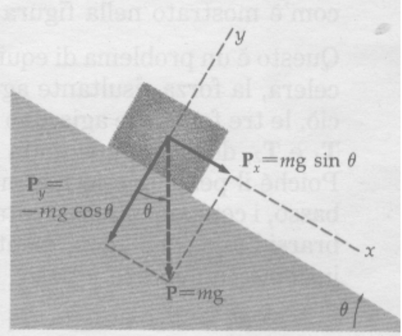


Figura 4.11. Il peso del blocco può essere sostituito dalle sue componenti: $mg\sin\theta$ secondo una direzione parallela al piano inclinato e $mg\cos\theta$ secondo una direzione perpendicolare a esso. La componente $mg\cos\theta$ è equilibrata dalla forza normale (non rappresentata).

La forza risultante nella direzione y è $F_n - mg\cos\theta$. Dalla seconda legge di Newton, e tenendo conto che $a_y = 0$, si ha

$$\Sigma F_y = ma_y = F_n - mg\cos\theta = 0$$

e quindi

$$F_n = mg\cos\theta \qquad 4.10$$

In modo simile, per le componenti x si ha

$$\Sigma F_x = ma_x = mg\sin\theta$$
$$a_x = g\sin\theta \qquad 4.11$$

L'accelerazione lungo il piano inclinato è costante ed è uguale a $g\sin\theta$. È utile controllare i risultati ottenuti assegnando valori estremi all'inclinazione, $\theta = 0$ e $\theta = 90°$. Per $\theta = 0$ la superficie è orizzontale; il peso ha solo la componente y che è equilibrata dalla forza normale F_n. L'accelerazione è, naturalmente, nulla: $a_x = g\sin 0° = 0$. All'estremo opposto, per $\theta = 90°$, il piano inclinato è verticale. Il peso ha solo la componente x lungo il piano inclinato e la forza normale è nulla: $F_n = mg \cos 90° = 0$. L'accelerazione è $a_x = g \sin 90° = g$: il corpo è in caduta libera.

Quando si trascura l'attrito, il corpo striscia lungo il piano inclinato con l'accelerazione $g \sin \theta$.

Esempio 4.5

Un quadro che pesa 8 N è retto da due fili aventi tensioni $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$, com'è mostrato nella figura 4.12a. Si trovi la tensione nei fili.

Questo è un problema di equilibrio statico. Poiché il quadro non accelera, la forza risultante agente su di esso dev'essere nulla. Perciò, le tre forze che agiscono sul quadro, il suo peso $m\mathbf{g}$, le tensioni $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$, debbono, una volta sommate, avere una risultante nulla. Poiché il peso ha solo il componente verticale $m\mathbf{g}$ diretto verso il basso, i componenti orizzontali delle tensioni $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ devono equilibrarsi l'uno con l'altro, mentre i loro componenti verticali devono insieme equilibrare il peso:

$$\Sigma F_x = T_{1x} + T_{2x} = T_1 \cos 30° - T_2 \cos 60° = 0$$

$$\Sigma F_y = T_{1y} + T_{2y} = T_1 \sin 30° + T_2 \sin 60° - mg = 0$$

Usando le espressioni $\cos 30° = \sqrt{3}/2 = \sin 60°$ e $\sin 30° = \frac{1}{2} = \cos 60°$, si ha:

$$T_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{T_2}{2}$$

ossia

$$T_2 = \sqrt{3}T_1$$

e

$$T_1\left(\frac{1}{2}\right) + T_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = mg$$

Moltiplicando per 2 e sostituendo $\sqrt{3}T_1$ al posto di T_2, si ottiene

$$T_1 + (\sqrt{3}T_1)(\sqrt{3}) = 2\ mg$$

Quindi,

$$T_1 = \tfrac{1}{2} mg = 4 \text{ N}$$

$$T_2 = \sqrt{3}T_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} mg = 6{,}93 \text{ N}$$

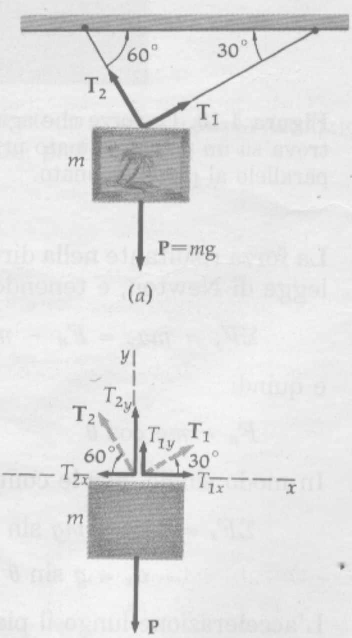


Figura 4.12. (a) Il quadro retto da due fili dell'esempio 4.5. (b) Scelta del sistema di coordinate e scomposizione delle forze nelle direzioni x e y.

Esempio 4.6

Un blocco è sospeso a una corda (di massa trascurabile) che scorre senza attrito attorno a un piolo ed è collegata a un altro blocco, poggiato su un tavolo senza attrito. Si trovi l'accelerazione di ciascun blocco e la tensione nella corda.

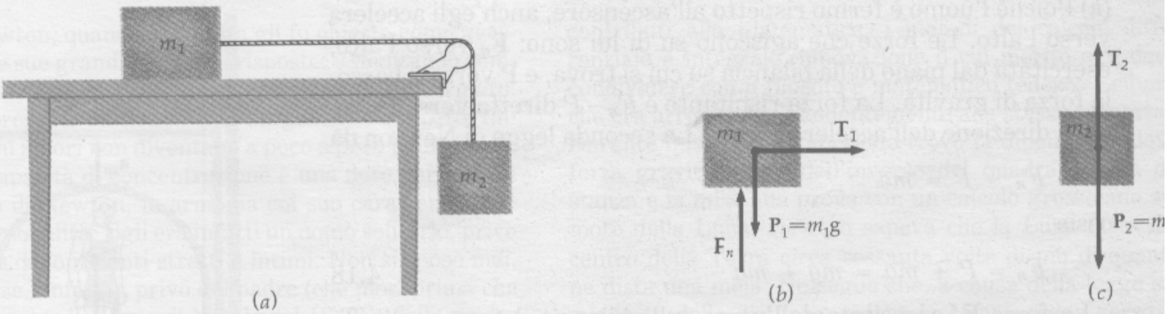


Figura 4.13. (a) I due blocchi dell'esempio 4.6. (b) Diagramma del corpo libero per m_1. (c) Diagramma del corpo libero per m_2.

La figura 4.13 mostra gli elementi importanti di questo problema. Le tensioni nella corda $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ hanno moduli uguali, perché si suppone che la corda sia senza massa e che non ci siano forze tangenziali agenti su di essa (il piolo è privo di attrito). Per il blocco 1 poggiato sul tavolo, le forze verticali $\mathbf{F}_n$ e $\mathbf{P}_1$ hanno moduli uguali a causa del vincolo che rende nulla l'accelerazione verticale di m_1. La seconda legge di Newton, applicata alla componente orizzontale, dà

$$T = m_1 a_1 \tag{4.12}$$

dove a_1 è l'accelerazione di m_1 lungo la superficie orizzontale e $T = T_1 = T_2$. Se si prende come direzione positiva la direzione verso il basso per l'accelerazione a_2 del blocco 2, l'equazione del moto per m_2 è

$$m_2 g - T = m_2 a_2 \tag{4.13}$$

Si possono semplificare queste equazioni notando che, se la corda che collega i due blocchi non si allunga, le accelerazioni a_1 e a_2 sono entrambe positive e uguali in modulo (ma non in orientamento). Chiamiamo a questo modulo; abbiamo allora

$$T = m_1 a \tag{4.14}$$

e

$$m_2 g - T = m_2 a \tag{4.15}$$

Queste due equazioni vanno risolte rispetto alle due incognite T e a, eliminando prima una delle due. Per esempio, si può eliminare T sostituendo, in base all'equazione 4.14, $m_1 a$ al posto di T nell'equazione 4.15. Si ottiene allora

$$m_2 g - m_1 a = m_2 a$$

ossia

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \tag{4.16}$$

Questa espressione per a può poi essere sostituita nell'equazione 4.14 per trovare T; si ottiene

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \tag{4.17}$$

Si noti che il risultato ottenuto per il modulo a è uguale a quello che si avrebbe se su una massa $m = m_1 + m_2$ agisse una forza $m_2 g$.

Esempio 4.7

Un uomo di massa m sta in piedi su una bilancia fissata sul pavimento di un ascensore, com'è mostrato nella figura 4.14. Che valore indica la bilancia quando l'ascensore accelera (a) verso l'alto e (b) verso il basso?

(a) Poiché l'uomo è fermo rispetto all'ascensore, anch'egli accelera verso l'alto. Le forze che agiscono su di lui sono: $\mathbf{F}_n$ verso l'alto, esercitata dal piano della bilancia su cui si trova, e $\mathbf{P}$ verso il basso, la forza di gravità. La forza risultante è $F_n - P$ diretta verso l'alto, nella direzione dell'accelerazione a. La seconda legge di Newton dà

$$F_n - P = ma$$

ossia

$$F_n = P + ma = mg + ma \tag{4.18}$$

La forza $\mathbf{F}_n'$ esercitata dall'uomo sulla bilancia determina l'indicazione della bilancia, che è il suo peso apparente. Poiché $\mathbf{F}_n'$ e $\mathbf{F}_n$ sono una coppia azione-reazione, esse hanno modulo uguale. Perciò, quando l'ascensore accelera verso l'alto, il peso apparente dell'uomo è maggiore del suo peso vero della quantità ma.

(b) Nel caso di un ascensore che accelera verso il basso chiamiamo a' il modulo dell'accelerazione. In questo caso la forza risultante dev'essere diretta verso il basso, il che implica che il peso è maggiore di F_n. Di nuovo la seconda legge di Newton dà

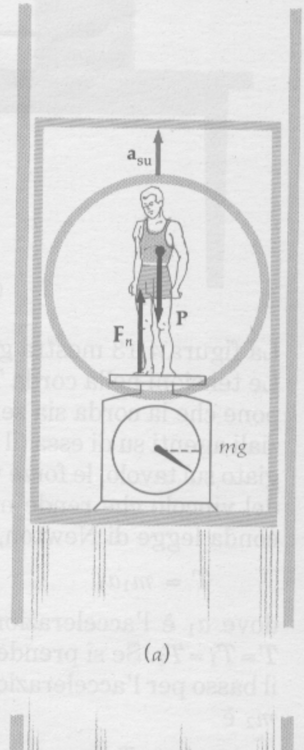
$$P - F_n = ma'$$

ossia

$$F_n = P - ma' = mg - ma' \tag{4.19}$$

Di nuovo, l'indicazione della bilancia, ossia il peso apparente, è uguale a F_n. In questo caso il peso apparente è minore di mg. Se $a' = g$, come succederebbe se l'ascensore fosse in caduta libera, l'uomo sarebbe apparentemente privo di peso. Che succede se l'accelerazione dell'ascensore è maggiore di g? (Perché questo succeda, qualcosa in aggiunta alla gravità dovrebbe tirar giù l'ascensore.) Supponendo che la superficie della bilancia non sia adesiva, la bilancia non può esercitare sull'uomo una forza diretta verso il basso. Poiché la forza verso il basso sull'uomo non può essere maggiore di P, la bilancia si allontanerà dall'uomo. L'uomo avrà accelerazione g, che è minore di quella dell'ascensore, quindi egli finirà per urtare contro il soffitto dell'ascensore; a questo punto, se il soffitto è abbastanza robusto, esso gli fornirà la forza verso il basso necessaria per dargli l'accelerazione a'.

Figura 4.14. Un uomo è in piedi su una bilancia in un ascensore che accelera. La bilancia indica il suo *peso apparente* F_n, che è maggiore di mg se l'accelerazione è diretta verso l'alto ed è minore di mg se l'accelerazione è diretta verso il basso.



Quesiti

17. Un quadro è retto da due fili, come nell'esempio 4.5. Ci si aspetta che la tensione sia maggiore o minore nel filo che forma l'angolo minore con la verticale?

18. Un peso viene attaccato a un filo che inizialmente è orizzontale. Può rimanere orizzontale il filo? Si spieghi.

19. Che effetto ha la velocità dell'ascensore sul peso apparente dell'uomo nell'esempio 4.7?

4.7 Sommario

1. Le relazioni fondamentali della meccanica classica sono contenute nelle leggi di Newton sul moto.

I legge. Un corpo continua nel suo stato di quiete o di moto con velocità costante, salvo che sia sottoposto a una forza.

II legge. L'accelerazione di un corpo è inversamente proporzionale alla sua massa e direttamente proporzionale alla risultante delle forze esterne che agiscono su di esso:

$$\mathbf{a} = \frac{\Sigma \mathbf{F}}{m}$$

ossia

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

III legge. Le forze si presentano sempre a due a due: se il corpo A esercita una forza sul corpo B, una forza uguale, ma opposta, viene esercitata dal corpo B sul corpo A.

2. La forza viene definita per mezzo dell'accelerazione che produce su un dato corpo. Una forza di 1 newton (N) è la forza che produce l'accelerazione di 1 m/s^2 su un corpo campione che abbia la massa di 1 kg.

3. La massa è una proprietà intrinseca di un corpo; essa misura la resistenza che il corpo oppone all'accelerazione. La massa di un corpo può essere confrontata con quella di un altro applicando a ciascuno dei due la stessa forza e misurando le loro accelerazioni; il rapporto tra le masse dei due corpi è uguale all'inverso del rapporto delle accelerazioni prodotte dalla stessa forza: $m_1/m_2 = a_2/a_1$. La massa di un corpo non dipende dal luogo in cui il corpo si trova.

4. Il peso di un corpo è la forza dovuta all'attrazione gravitazionale tra il corpo e la Terra. Esso è direttamente proporzionale alla massa m e al campo gravitazionale $\mathbf{g}$ (che è anche uguale all'accelerazione di gravità di caduta libera)

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$$

Il peso non è una proprietà intrinseca di un corpo: esso dipende dal luogo in cui il corpo si trova, perché $\mathbf{g}$ può variare da luogo a luogo.

5. Il metodo generale per risolvere un problema usando le leggi di Newton include i passi seguenti:

a. si faccia un disegno chiaro;

b. si isoli il corpo (la particella) in esame e si tracci un diagramma del corpo libero, indicando tutte le forze esterne che agiscono sul corpo: si tracci un diagramma separato per ogni corpo considerato;

c. si scelga un sistema di coordinate conveniente per ciascun corpo e si applichi la seconda legge di Newton, scrivendo le sue componenti;

d. si risolvano le equazioni trovate rispetto alle grandezze incognite, usando qualsiasi informazione addizionale di cui si disponga;

e. si controllino i risultati per vedere se sono ragionevoli; si esamini l'effetto che ha sulle soluzioni l'assegnare alle variabili valori estremi.