Moto di un proiettile

Abbiamo già visto il moto verticale di un corpo nel campo gravitazionale, vediamo ora cosa capita quando lanciamo un corpo con un angolo α rispetto all'orizzontale.

Visto che l'unica accelerazione è quella di gravità ed è diretta verso il basso, il corpo sarà decelerato in salita ed accelerato in discesa.

Il corpo tuttavia si muove anche in orizzontale, in tale movimento però non incontra accelerazioni per cui il moto è rettilineo uniforme.

Si ha: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0\, t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}\, t^2$ che in componenti diventa $x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} = x_0\,\boldsymbol{i} + y_0\,\boldsymbol{j} + (v_{0x}\,\boldsymbol{i} + v_{0y}\,\boldsymbol{j})t + \frac{1}{2}g(-\boldsymbol{j})t^2$ per cui:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}g\,t^2 \end{cases}$$ dove $\boldsymbol{v}_0 = v_{0x}\,\boldsymbol{i} + v_{0y}\,\boldsymbol{j}$ è la velocità iniziale

Se poniamo il sistema di coordinate con l'origine nel punto di lancio si ha $\boldsymbol{r}_0 = 0$ ed il sistema si semplifica:

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}g\,t^2 \end{cases}$$

La seconda equazione corrisponde ad un moto verticale di un corpo lanciato a velocità v_{0y}, sappiamo già che il tempo di salita è uguale al tempo di discesa, la somma di due tempi è detta **tempo di volo**.

La distanza percorsa in orizzontale dal proiettile è detta **gittata**.

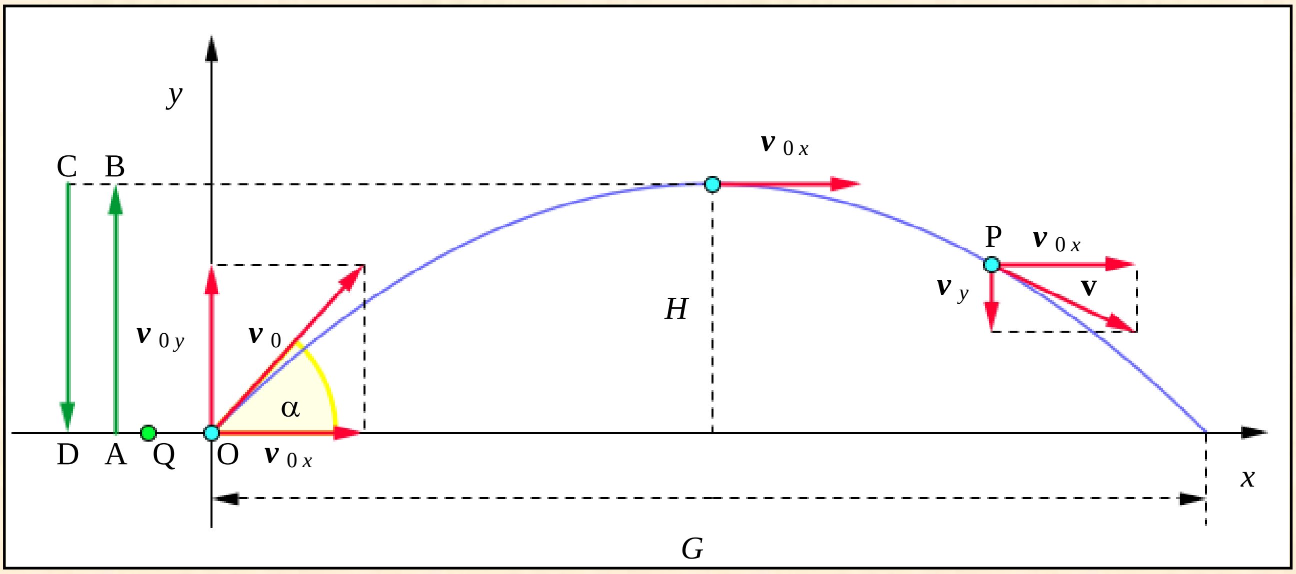
Il corpo nel tempo di salita, oltre a raggiungere la massima altezza *H*, percorre in orizzontale anche metà gittata *G*.

Ricordando la relazione $-2g\,H = v_y{}^2 - v_{0y}^2$ visto che alla massima altezza $v_y = 0$ si ricava $H = \frac{v_{0y}^2}{2g}$

mentre il tempo di salita lo ricaviamo da $v_y = v_{0y} - g\,t_S$ cioè $t_S = \frac{v_{0y}}{g}$

la gittata sarà allora allo spazio percorso in orizzontale nel doppio del tempo di salita:

$$G = 2\,v_{0x}\,t_S = \frac{2\,v_{0x}v_{0y}}{g}$$



Come si vede dalla figura, nel moto del punto P la $\boldsymbol{v}_{0x}$ si mantiene costante,

alla massima altezza H la $\boldsymbol{v}_y = 0$ e la $\boldsymbol{v}_{0x} \equiv \boldsymbol{v}$.

Se consideriamo il moto puramente verticale di un punto Q animato da una velocità pari a $\boldsymbol{v}_{0y}$, il punto Q raggiunge B nello stesso tempo impiegato da P per raggiungere la massima altezza H.

Nella fase di discesa CD, il punto Q raggiunge il suolo contemporaneamente a P. I tempi di salita e di discesa sono uguali.

Se scriviamo H e G in funzione dell'angolo α si ha:

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g} \quad \text{e} \quad G = \frac{2\, v_0^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{g}$$

in particolare dalla seconda, chiediamoci quando è massima la gittata.

Ora se consideriamo $\boldsymbol{v}_{0y} = \boldsymbol{v}_0 \operatorname{sen} \alpha$ e $\boldsymbol{v}_{0x} = \boldsymbol{v}_0 \cos \alpha$ come lati di un triangolo rettangolo, la gittata sarà massima quando il loro prodotto è massimo.

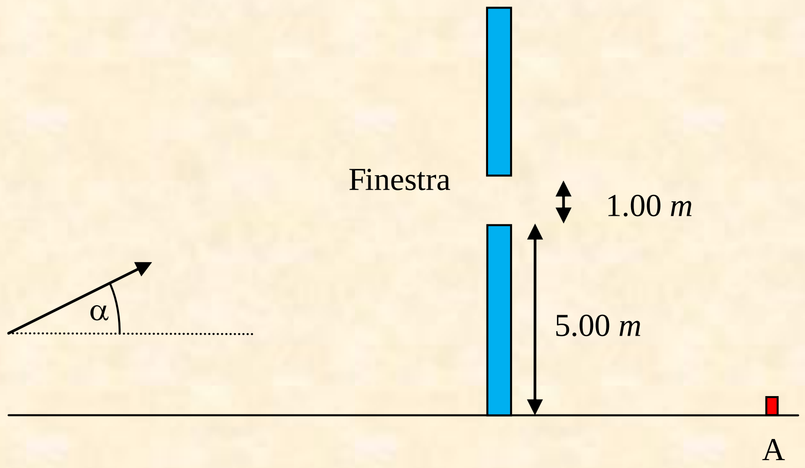
Il prodotto costituisce il doppio dell'area del triangolo rettangolo, ricordando che un triangolo rettangolo si può inscrivere in una semicirconferenza di diametro v_0, l'area del triangolo è base per altezza, ma la base è fissa e corrisponde al diametro, e quindi la massima area si ha per l'altezza corrispondente al raggio, i cateti devono essere quindi uguali, deve essere sen α = cos α, da cui α = 45°.

Esercizio:

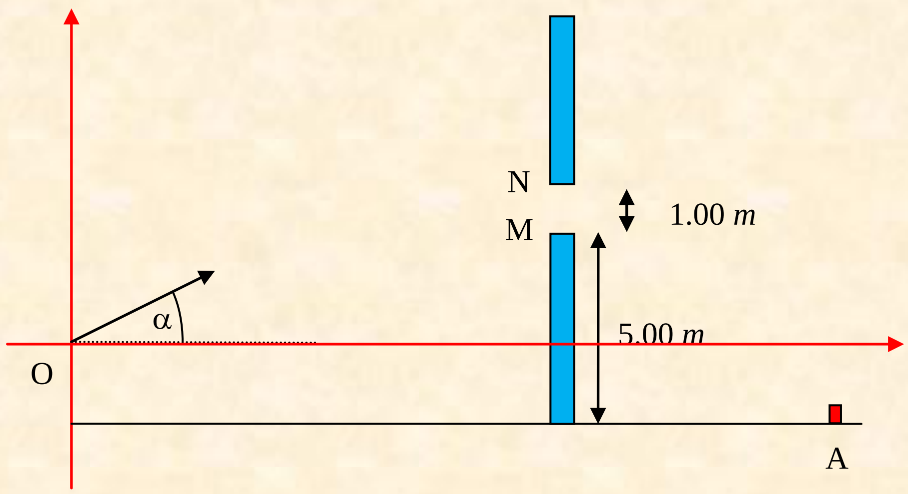
Un proiettile viene lanciato da 2.00 *m* dal suolo con un angolo $\alpha = 60°$ rispetto all'orizzontale.

a) Qual è il range delle velocità che permettono al proiettile di passare attraverso la finestra F distante 8.00 *m* dal punto di lancio con le caratteristiche in figura?

b) E' possibile colpire il barattolo A posto a 2.00 *m* dalla finestra? Se la risposta è affermativa calcola la velocità necessaria, se la risposta è negativa determina il range dello spostamento verticale del punto di lancio.



a) Occorre innanzitutto scegliere un sistema di coordinate, p.es. nel punto di lancio:



In tal modo si hanno le coordinate A (10.0 , – 2.00), M (8.00 , 3.00) ed N (8.00 , 4.00)
Scriviamo le equazioni del moto:

$$x = v\cos 60\, t \quad ; \quad y = v\ \mathrm{sen}\, 60\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 .$$

Eliminando il parametro t si ha

$$y = x\tan 60 - \frac{g\, x^2}{2(v^2\cos^2 60)}$$ che è l'equazione della parabola.

Per riuscire a passare attraverso la finestra occorre imporre il passaggio per M ed N:

$$3.00 = 8.00\tan 60 - \frac{g\ 64.0}{2(v^2\cos^2 60)} \quad \text{e} \quad v_1 = 10.75 = 10.8\ m/s$$

$$4.00 = 8.00\tan 60 - \frac{g\ 64.0}{2(v^2\cos^2 60)} \quad \text{e} \quad v_2 = 11.29 = 11.3\ m/s$$

quindi il range richiesto è $10.8 \le v \le 11.3\ m/s$

b) il proiettile, oltre a passare dalla finestra deve colpire A, determiniamo la velocità necessaria:

passaggio per A (10.0 , – 2.00):

$-2.00 = 10.0\tan 60 - \frac{g\ 100}{2(v^2\cos^2 60)}$ e $v = 10.08 = 10.1\ m/s$ non è possibile perché non rientra nel range precedente.

Per riuscire a colpire A occorre spostare il punto di lancio in verticale come richiesto.

Il range dello spostamento verticale corrisponde alle parabole tra quella passante per A, M ed O’, e quella passante per A, N ed O’’, dove O’ ed O’’ sono i due nuovi punti di lancio.

In tal caso se O’ (0.00 , y_1), dalla parabola $y = y_1 + x\tan 60 - \frac{g\ x^2}{2(v^2\cos^2 60)}$ imponiamo il passaggio per

A (10.0 , – 2.00) e per M (8.00 , 3.00)

$$\frac{100g}{2v^2\cos^2 60} = 2.00 + 10.0\tan 60 + y_1$$
$$\frac{64g}{2v^2\cos^2 60} = -3.00 + 8.00\tan 60 + y_1$$

Eliminando v dividendo membro a membro si ricava:

$$\frac{100}{64} = \frac{2.00 + 10.0\tan 60 + y_1}{-3.00 + 8.00\tan 60 + y_1} \quad \text{da cui} \quad y_1 = 4.19m$$

Con O’’ (0.00 , y_2) imponendo il passaggio per A (10.0 , – 2.00) e per N (8.00 , 4.00) si ha:

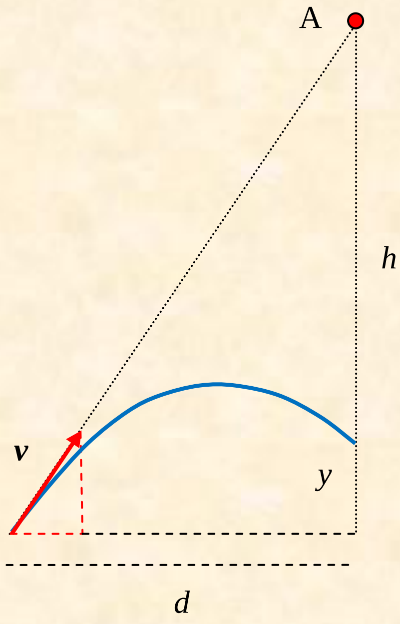
$$\frac{100g}{2v^2\cos^2 60} = 2.00 + 10.0\tan 60 + y_2$$
$$\frac{64g}{2v^2\cos^2 60} = -4.00 + 8.00\tan 60 + y_2 \quad \text{come prima} \quad \frac{100}{64} = \frac{2.00 + 10.0\tan 60 + y_2}{-4.00 + 8.00\tan 60 + y_2}$$

Da cui $y_1 = 6.97m$

Per cui il range è $4.19 \le y \le 6.97\ m$

Esercizio :

Un corpo A viene lanciato verso l'alto. Alla massima altezza *h* viene sparato un proiettile con velocità ***v*** in direzione del corpo.



Riuscirà il proiettile, per qualunque velocità iniziale a colpire il corpo?

Per il proiettile $\begin{cases} d = v_{0x}\ t \\ y = v_{0y}\ t - \frac{1}{2} g\ t^2 \end{cases}$

Per il corpo $y = h - \frac{1}{2} g\ t^2$.

Dalla similitudine $v_{0x} : v_{0y} = d : h$ per cui $h = \frac{v_{0y}\ d}{v_{0x}} = v_{0y}\ t$

Sostituendo *h* nella legge oraria del corpo si ha la stessa legge oraria del proiettile.

Il proiettile ed il corpo raggiungeranno quindi nello stesso tempo la stessa altezza.